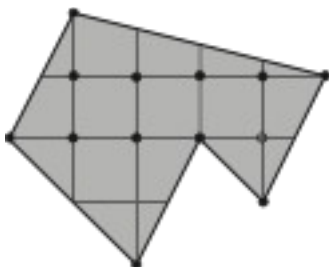


Sujet 4 - Calculs faciles de surfaces

On s'intéresse à une classe particulière de polygones : les polygones entiers. Pour les définir nous avons besoin de travailler sur une feuille à petits carreaux. Un point d'une feuille à petits carreaux est un point entier s'il se trouve à l'intersection de deux lignes du quadrillage. Un polygone dessiné sur votre feuille à petits carreaux est un polygone entier si tous ses sommets sont des points entiers.

Exemple : Le polygone ci-dessous est un polygone entier. Il contient 7 points entiers sur son bord, et 8 points entiers dans son intérieur, soit un total de 15 points entiers.



Voici la question générale qui nous intéresse : on considère un polygone entier P , on note N_i le nombre de points entiers contenus à l'intérieur de P , et N_b le nombre de points entiers contenus sur le bord de P .

Question 1 :

Existe-t-il une relation entre l'aire $A(P)$ du polygone entier P , et les nombres N_i et N_b ?

Le mieux pour commencer, consiste à regarder ce qui se passe dans les cas les plus simples. Par exemple, que pouvez-vous dire dans le cas des carrés ? dans le cas des rectangles ? dans le cas des triangles rectangles ?

Voici d'autres questions qui peuvent éventuellement vous aider à réfléchir sur ce problème :

Question 2 : Si un triangle entier ne contient (y compris sur son bord) aucun point entier autre que ses sommets, que peut-on dire de son aire ?

Question 3 : Si vous obtenez des résultats sur les triangles, comment cela peut-il vous aider à traiter le cas des autres polygones entiers ?