

**School:** Colegiul Național Iași

**Teacher:** Elena Mihuț

**Researcher:** Marius Apetrii (Universitatea „Al. I. Cuza” Iași)

**Without symmetry**

For positive integers  $m$  and  $n$ , consider the rectangle with  $m$  lines and  $n$  columns, divided into  $1 \times 1$  cells, as in the figures below.

We say that a set of cells of the considered rectangle is *without symmetry* if there are not two cells in that set symmetrically positioned with respect to one of the lines of demarcation of the cells (horizontal or vertical).

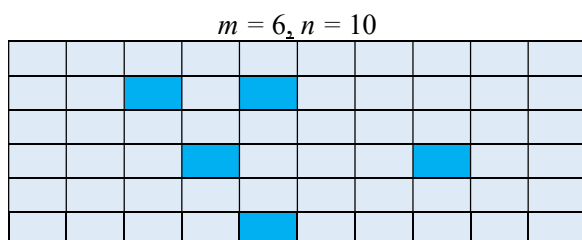


Fig. 1  
Submulțime fără simetrii

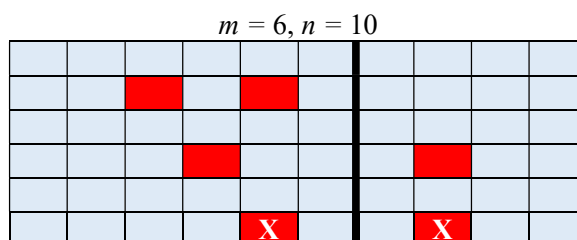


Fig. 2  
Submulțime cu simetrii

1. For  $k > 0$ , we denote by  $S(m,n,k)$  the set of symmetry-free subsets that have  $k$  elements.
    - a) Determine the cardinality of the set  $S(m,n,k)$  for  $k = 1, k = 2, k = 3$ .
    - b) What are the values of  $k$  for which  $S(m,n,k)$  has no element?
  2. If we number the cells of the rectangle, for a subset  $A$  without symmetries we define  $sum(A)$  as the sum of the numbers in the cells of that set.
- We define the number  $V(m,n,k) = \max \{sum(A) \mid A \text{ from } S(m,n,k)\}$ .

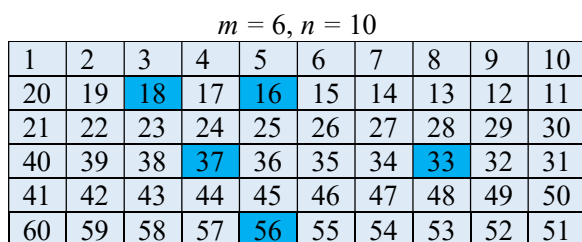


Fig. 3  
 $Sum(A) = 18 + 16 + 37 + 33 + 56 = 160$

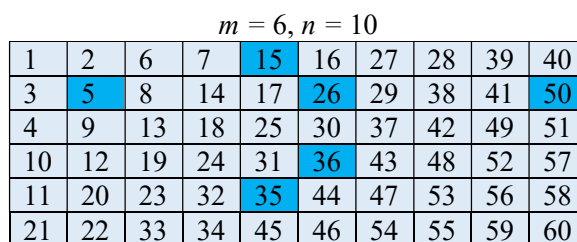


Fig. 4  
 $Sum(A) = 15 + 5 + 26 + 36 + 35 = 167$

For each of the numbering modes described in Fig. 3 and Fig. 4, respectively, to calculate:

- a)  $V(m,n,k)$  for  $k = 1, k = 2, k = 3$ ;
- b) the maximum possible value for  $V(m,n,k)$ .

## Fără simetrii

Pentru numerele naturale strict pozitive  $m$  și  $n$ , considerăm dreptunghiul cu  $m$  linii și  $n$  coloane, împărțit în celule  $1 \times 1$ , ca în figurile de mai jos.

Spunem că o mulțime de celule ale dreptunghiului considerat este *fără simetrii* dacă nu există în mulțimea respectivă două celule poziționate simetric față de una dintre liniile de demarcație ale celulelor (orizontale sau verticale).

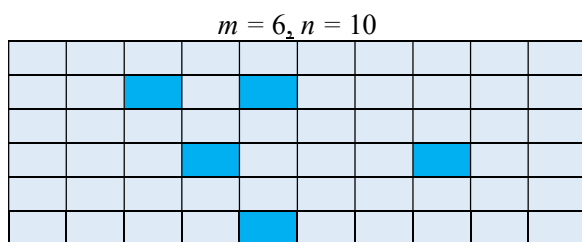


Fig. 1  
Submulțime fără simetrii

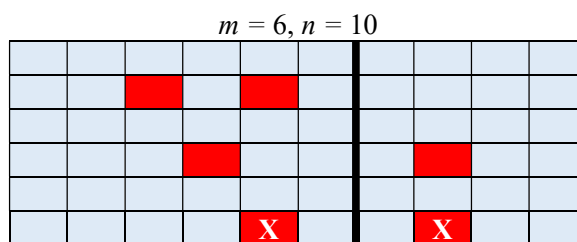


Fig. 2  
Submulțime cu simetrii

1. Pentru  $k > 0$ , notăm cu  $S(m, n, k)$  mulțimea submulțimilor fără simetrii care au  $k$  elemente.
  - a) Să se determine cardinalul mulțimii  $S(m, n, k)$  pentru  $k = 1, k = 2, k = 3$ .
  - b) Care sunt valorile lui  $k$  pentru care  $S(m, n, k)$  nu are niciun element?
2. Dacă numerotăm celulele dreptunghiului, pentru o submulțime fără simetrii  $A$  definim  $sum(A)$  ca fiind suma numerelor din celulele mulțimii respective.  
Definim numărul  $V(m, n, k) = \max \{sum(A) \mid A \text{ din } S(m, n, k)\}$ .

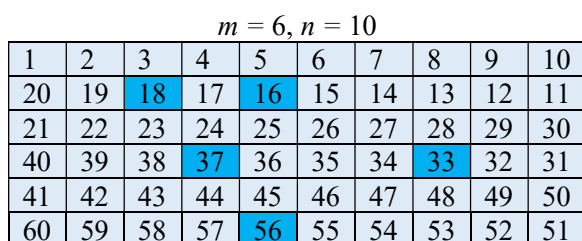


Fig. 3  
 $Sum(A) = 18 + 16 + 37 + 33 + 56 = 160$

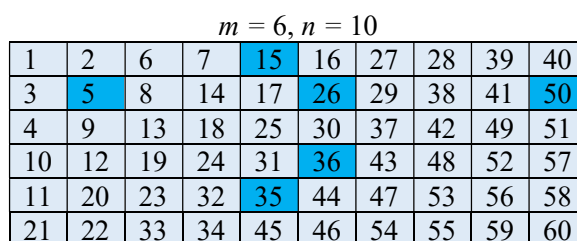


Fig. 4  
 $Sum(A) = 15 + 5 + 26 + 36 + 35 + 50 = 167$

Pentru fiecare dintre modurile de numerotare descrise în Fig. 3, respectiv Fig. 4, să se calculeze:

- a)  $V(m, n, k)$  pentru  $k = 1, k = 2, k = 3$ ;
- b) valoarea maximă posibilă pentru  $V(m, n, k)$ .