
Sujets Maths en Jeans

lycées ... et collèges ...

Sujet 1 : Les factorielles

On appelle "*factorielle n*" le nombre égal au produit $1 \times 2 \times \dots \times n$, on note ce nombre $n!$. Avec de petits calculs on trouve

$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 8! = 40320.$$

Le nombre $n!$ croît très rapidement avec n , et il devient vite difficile à appréhender. On peut néanmoins se poser quelques questions à son sujet, et espérer y répondre sans avoir à le calculer explicitement.

Question : Quel est le nombre de zéros à la fin de $n!$?

Question : Quel est le nombre de chiffres dans l'écriture de $n!$?

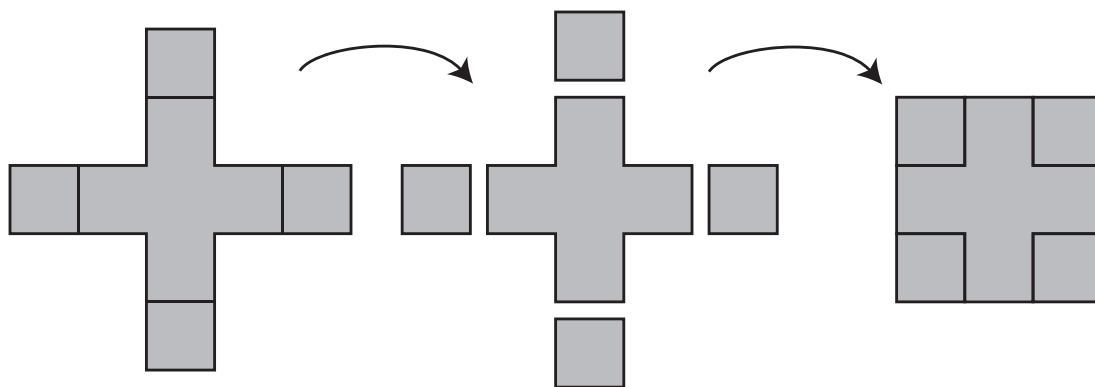
Question : Quel est le dernier chiffre non nul dans l'écriture de $n!$?

Exemple : Considérons $8!$, le nombre de zéros à la fin de son écriture est 1, le nombre de chiffres dans son écriture est 5, le dernier chiffre non nul dans son écriture est 2.

Sujet 2 : Découpons des polygones !

Deux polygones du plan sont dits *congruents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par des découpages et des collages le long de segments de droite.

Exemple : Dans la figure ci-dessous, la croix à gauche et le carré à droite sont congruents. On passe de l'un à l'autre en découpant la croix suivant quatre segments. On obtient ainsi cinq morceaux : quatre petits carrés et une petite croix. En collant les quatre petits carrés sur la petite croix en des emplacements bien choisis, on arrive finalement au grand carré.



Question : À quelle condition deux polygones sont-ils congruents ?

Si l'on découpe un polygone en plusieurs morceaux, alors l'aire du polygone est égale à la somme des aires de ses morceaux. Ceci implique que deux polygones congruents ont nécessairement même aire. Réciproquement

Question : Deux polygones ayant même aire sont-ils congruents ?

Lorsqu'on attaque un problème de mathématiques, il est souvent utile de se poser des questions plus simples ou un peu différentes. Peut-être les questions suivantes vous aideront-elles à démarrer vos recherches.

Question : Comment comparer les aires de deux polygones à l'aide de découpages et de collages ?

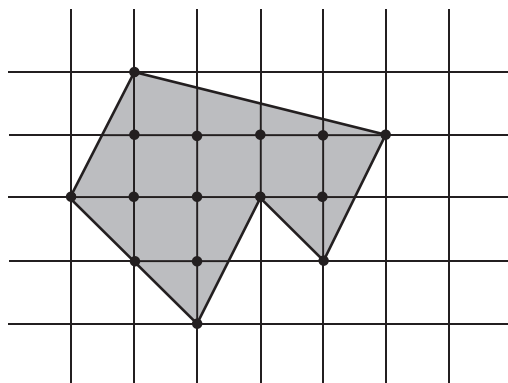
Question : À quelle condition deux triangles, deux carrés, deux rectangles, ou deux parallélogrammes sont-ils congruents ?

Question : À quelle condition un triangle et un carré sont-ils congruents ?

Sujet 3 : Mesurer l'aire en comptant des points ?

On s'intéresse ici à une classe particulière de polygones : les polygones entiers. Pour les définir nous avons besoin de travailler sur une feuille à petits carreaux. Un point d'une feuille à petits carreaux est un *point entier* s'il se trouve à l'intersection de deux lignes du quadrillage. Un polygone dessiné sur votre feuille à petits carreaux est un *polygone entier* si tous ses sommets sont des points entiers.

Exemple : Le polygone ci-dessous est un polygone entier. Il contient 7 points entiers sur son bord, et 8 points entiers dans son intérieur, soit un total de 15 points entiers.



Voici la question générale qui nous intéresse : on considère un polygone entier P , on note N_i le nombre de points entiers contenus à l'intérieur de P , et N_b le nombre de points entiers contenus sur le bord de P .

Question : Existe-t-il une relation entre l'aire $A(P)$ du polygone entier P , et les nombres N_i et N_b ?

Le mieux pour commencer, c'est de regarder ce qui se passe dans les cas les plus simples. Par exemple, que pouvez-vous dire dans le cas des carrés ? dans le cas des rectangles ? dans le cas des triangles rectangles ?

Voici d'autres questions qui peuvent éventuellement vous aider à réfléchir sur ce problème :

Question : Si un triangle entier ne contient (y compris sur son bord) aucun point entier autre que ses sommets, que peut-on dire de son aire ?

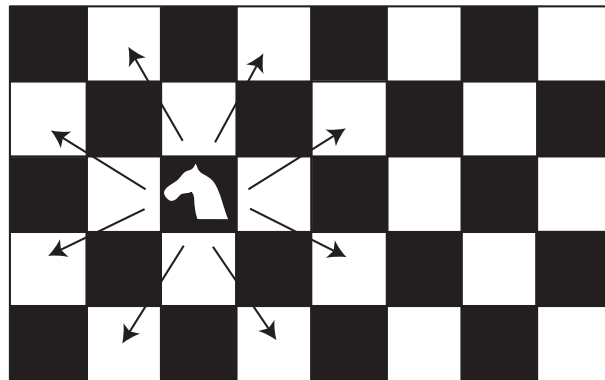
Question : Si vous obtenez des résultats sur les triangles, comment cela peut-il vous aider à traiter le cas des autres polygones entiers ?

Sujet 4 : Un problème bien cavalier

On considère un échiquier avec p lignes et q colonnes.

Question : Y-a-t-il un moyen pour qu'un cavalier parcoure toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois sur la même case ?

On rappelle qu'un cavalier se déplace de la manière suivante : il parcourt deux cases dans une direction (verticale ou horizontale) puis une case dans une direction perpendiculaire. On a représenté ci-dessous un échiquier avec 5 lignes et 8 colonnes, les flèches indiquent tous les déplacements possibles du cavalier.



Sujet 5 : Le trajet le plus court

On représente un réseau ferroviaire de la façon suivante :

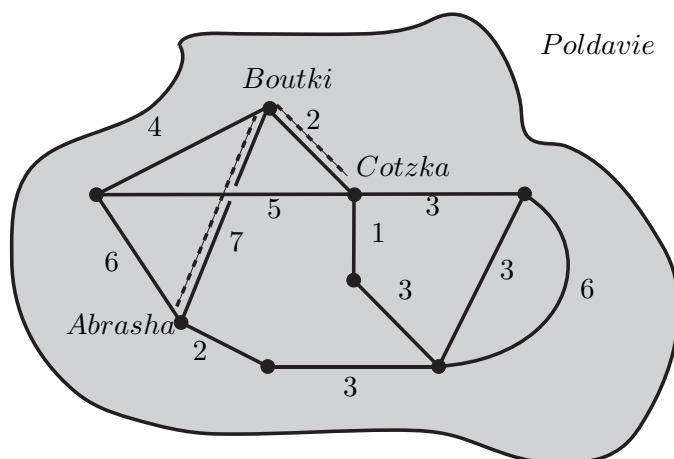
- à chaque gare on associe un point,
- à chaque ligne directe entre deux gares on associe une courbe reliant les deux points correspondants aux gares.

Comme cette représentation ne respecte pas forcément les distances, on écrit au-dessus de chaque courbe la longueur de voie ferrée qu'elle représente.

Question : Étant donnée une telle représentation, comment trouver le trajet le plus court entre deux gares ?

Il s'agit ici d'élaborer une méthode (on pourrait dire un algorithme) qui permette de déterminer de façon automatique le trajet le plus court entre deux gares, ceci quel que soit le réseau ferroviaire sur lequel on travaille.

Exemple : Nous avons représenté ci-dessous le réseau ferroviaire de Poldavie. Le trajet le plus court reliant les gares d'Abrasha et de Cotzka est celui passant par Boutki : on parcourt d'abord un trajet de 7km puis un trajet de 2km, ce qui fait un total de 9km.



Difficile d'aborder ce problème... Commencez par fixer votre gare de départ, disons la gare A .

Question : Une fois la gare A fixée, pour quelles gares B pouvez-vous donner directement, et de façon certaine, le trajet le plus court entre A et B ?

Sujet 6 : Comment gagner au jeu d'Isaacs ?

Ambroise et Bénédicte, que nous dénommerons simplement par A et B , jouent au jeu d'Isaacs. Le jeu d'Isaacs est un jeu de cartes très simple, dans lequel chaque joueur possède deux cartes en main, qui restent les mêmes durant toute la partie. Nous imposons au joueur A le 8 de cœur et l'as de pique, et à la joueuse B le 7 de pique et le 2 de cœur.

Une partie du jeu d'Isaacs se déroule en 10 tours joués de la façon suivante :

- au début d'un tour chaque joueur a ses deux cartes en main,
- puis les deux joueurs jettent simultanément une carte sur le tapis,
- le joueur A gagne le tour si les deux cartes sur le tapis sont de même couleur, pique ou cœur, sinon c'est la joueuse B qui gagne,
- le montant des gains est égal à la valeur de la carte jetée par le joueur gagnant le tour.

Le gagnant de la partie est le joueur ayant le plus grand total de points gagnés.

Question : Quelle est la meilleure façon de jouer pour gagner au jeu d'Isaacs ?

Question : Est-il préférable d'être à la place d'Ambroise ou de Bénédicte ?

Vous pouvez modifier les paramètres du jeu (les cartes de A et B , le nombre de parties, le nombre de joueurs...) pour essayer de mieux comprendre ce qui se passe.