

Sujet 2 : Convex ab chao

MATHs.en.Jeans 2019-2020

Erwan Kerrien

Un polygone convexe est un polygone fermé qui peut se définir de diverses manières. Intuitivement, c'est une forme qui n'a pas de trou et dont le contour ne présente que des bosses et pas de creux. Plus formellement, si vous prenez deux points quelconques à l'intérieur d'une forme convexe, alors l'intégralité du segment les reliant est aussi à l'intérieur. Il existe des polygones convexes à autant de côtés qu'on veut, à partir de 3 côtés. La figure 1 vous montre un exemple de quadrilatère convexe et deux exemples de quadrilatères non convexes.

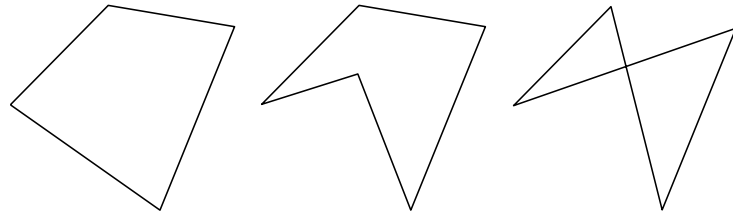


FIGURE 1 – Exemples de quadrilatère convexe (à gauche) et non convexes (les deux à droite).

Si je prends trois points au hasard (non alignés), alors ils forment un triangle, qui est toujours un polygone convexe. Mais si je prends quatre points au hasard (non alignés trois à trois), alors la figure 1 ci-dessus montre bien que je ne peux pas toujours former un polygone convexe.

Questions

Je vous demande donc de répondre aux questions suivantes. Dans ce qui suit «ensemble de points au hasard» doit toujours être compris au sens non dégénéré, c'est-à-dire que les points sont certes tirés au hasard mais aucun triplet de points n'est aligné dans cet ensemble. La figure 2 donne un exemple de 9 points tirés au hasard, dont on peut extraire un pentagone convexe.

- Quelle est la taille minimale de l'ensemble de points que je dois tirer au hasard pour être sûr de pouvoir y former un quadrilatère convexe ?
- Même question pour un pentagone, un hexagone, un heptagone...
- De manière générale, combien de points dois-je considérer a minima pour voir y extraire un polygone convexe à N côtés (on sait d'après ce qui précède que la réponse est 3 pour $N = 3$ et au moins 5 pour $N = 4$) ?

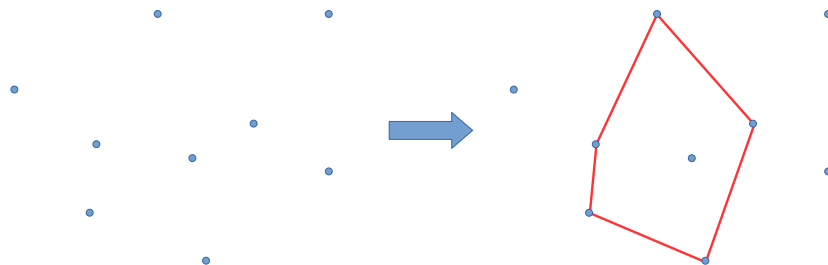


FIGURE 2 – Exemples d'ensemble de 9 points tirés au hasard (à gauche) dont on peut extraire un pentagone (à droite)