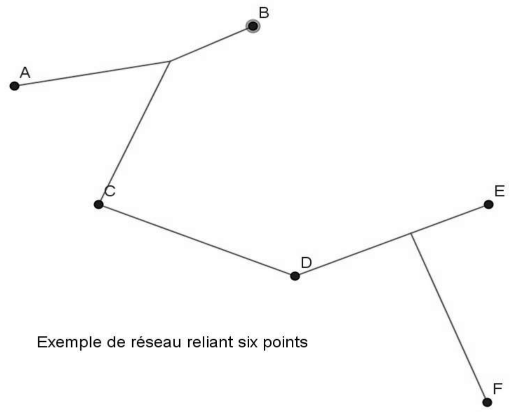
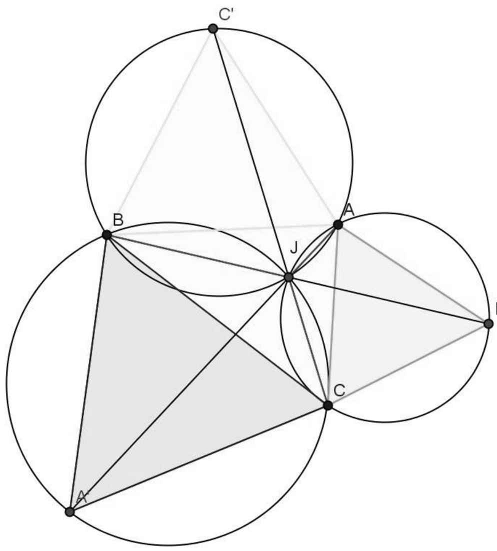
Sujet 1. Le réseau le plus économique.

On sait que le chemin le plus court entre deux points du plan est la ligne droite. Si on considère plus de deux points, on peut se demander comment trouver un ensemble de chemins qui relient tous ces points, de longueur totale la plus petite possible. On peut imaginer que ce problème intéresse par exemple une compagnie de télécommunications qui veut créer un réseau reliant certaines villes et qui souhaite minimiser la longueur totale des câbles à installer...



Exemple de réseau reliant six points

Dans le cas de trois points A,B et C, la solution est connue : il existe un unique point J du plan qui minimise la somme des distances aux trois points JA+JB+JC, et le réseau optimal est constitué des trois segments [JA], [JB], [JC]. Dans le cas où tous les angles du triangle sont de mesure inférieure à 120°, le point J a la propriété remarquable que les trois angles formés par les demi-droites [JA), [J,B), [J,C) sont de 120° . Dans le cas où l'un des angles du triangle est de mesure supérieure ou égale à 120° , J est le sommet du triangle de plus grand angle, par exemple A, et le réseau optimal est formé des segments [AB] et [AC] .



Il est proposé de chercher le réseau optimal dans le cas de quatre points qui forment un carré ou un rectangle, puis dans quelques autres exemples (quadrilatère quelconque, pentagone régulier...). Pour cela, on peut utiliser le résultat sur les triangles pour donner les propriétés d'un réseau optimal.