Il était une fois …
Un pays dont on ne s'échappe jamais !

Année 2016- 2017

Lyla DEMANGE, Izaline ZENTE, élèves de 4ème
Lorraine BERGEOT, Claire CHARTON, Adèle CLAUDEPIERRE, Clara VEGA, élèves de 3ème.

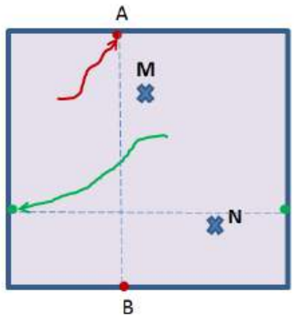
Encadrés par HIRIART Louisette et FINDIK Ziya

Établissements : Collège George CHEPFER de VILLERS lès NANCY

Chercheuse : Irène MARCOVICI, IECL.

1. Présentation du sujet

Dans un drôle de pays en forme de carré, il est impossible de s'échapper !
Lorsqu'on essaie de s'échapper au Nord par un point A, on est instantanément envoyé au point B qui est tout en dessous, plein Sud !
De même, si on veut s'échapper par le Sud, on est envoyé au Nord.
Et si on veut s'échapper par l'Ouest, on est envoyé au point qui est à la même hauteur, mais tout à l'Est…
De même, si on veut s'échapper par l'Est, on est envoyé à l'Ouest.



Dans ce drôle de pays, on cherche un plus court chemin pour aller d'un certain point M à un point N ?

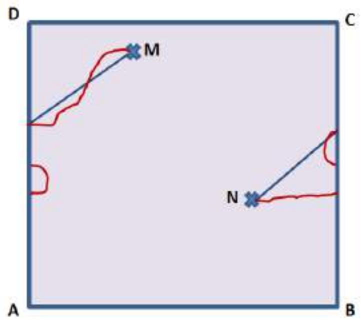
2. Sommaire

Nous avons trouvé des plus courts chemins pour aller d'un point M à un point N, selon que l'on rencontre 0, 1 ou 2 côtés de ce drôle de pays carré.
A – Si on ne rencontre aucun côté du pays carré ABCD.
B – Si on se déplace vers un seul côté du pays carré ABCD.
C – Si on se déplace vers deux côtés consécutifs du pays carré ABCD.
D – Et si on se déplace vers plus de 2 côtés ?
E – Conclusion : Plus court chemin pour aller de M en N dans ce drôle de pays.

3. Conclusion

Dans ce drôle de pays carré ABCD, nous avons trouvé un chemin le plus court possible pour aller d'un point M à un point N selon la position du point M par rapport au point N. Il peut même parfois y avoir 2 ou 4 chemins possibles. Dans l'article qui suit, nous détaillons notre démarche et nos résultats.
Le logiciel de géométrie dynamique « GeoGebra » nous a beaucoup aidés dans nos recherches.

Première remarque :
On ne se déplacera qu'en ligne droite à l'intérieur du pays carré ABCD pour obtenir des plus courts chemins.

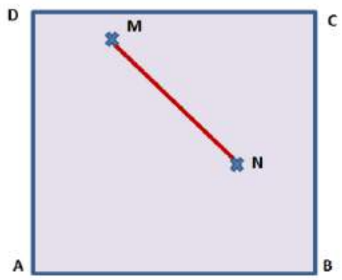


Sur la figure ci-contre, le chemin bleu en ligne droite est bien plus court que le chemin rouge.

Nous allons chercher des plus courts chemins pour aller d'un point M à un point N, selon que l'on rencontre 0, 1, 2 ou plus de fois un côté de ce drôle de pays.

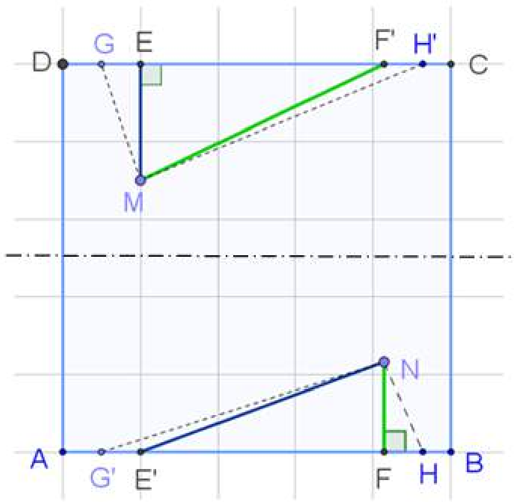
A – On ne rencontre aucun côté du pays carré ABCD.

Le segment [MN] est évidemment le plus court chemin pour aller de M à N.



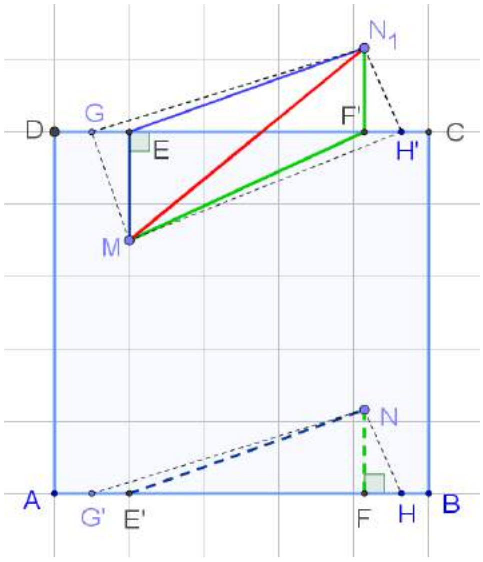
B – En se déplaçant vers un seul côté du pays carré ABCD.

Nous cherchons le plus court chemin pour aller de M à N si on se déplace vers le côté [CD] du pays carré ABCD.



Le chemin bleu [ME] puis [E'N] où ME est la plus courte distance de M au côté [CD] et E' est le symétrique de E par rapport à l'axe horizontal du carré ABCD ainsi que le chemin vert [NF] puis [F'M] où NF est la plus courte distance du point N au côté [AB] et F' est le symétrique de F par rapport à l'axe horizontal de ABCD sont les deux chemins que nous avons immédiatement trouvés.
Tout chemin allant vers [CD] à gauche de E sera plus long que le chemin bleu, comme par exemple [MG] et [G'N] en pointillés.
Tout chemin allant vers [CD] à droite de F' sera plus long que le chemin vert, comme par exemple [MH'] et [HN] en pointillés.

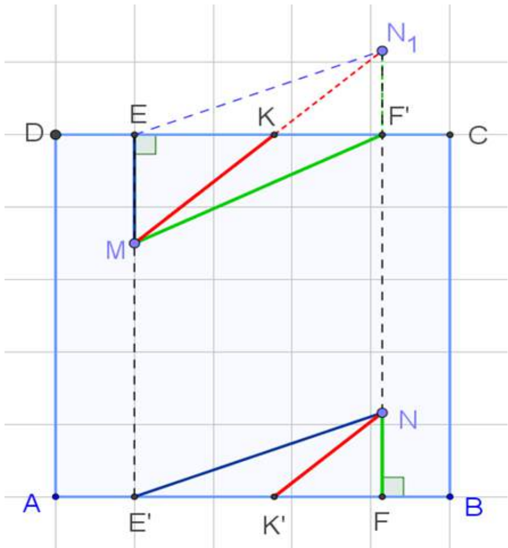
On a alors construit les 2 chemins bleu et vert ainsi que les chemins en pointillés dans un même prolongement à partir de M.



Par construction, tous les chemins aboutissent en un point que nous nommerons N_1.
Mais alors, le plus court chemin pour allez de M à N_1 est le segment $[MN_1]$.

Par construction :
$[EN_1]$ // [E'N] et EN_1 = E'N,
donc le quadrilatère EN_1NE' est un parallélogramme.
N1 est donc l'image de N par la translation qui envoie E' en E, donc aussi B en C.

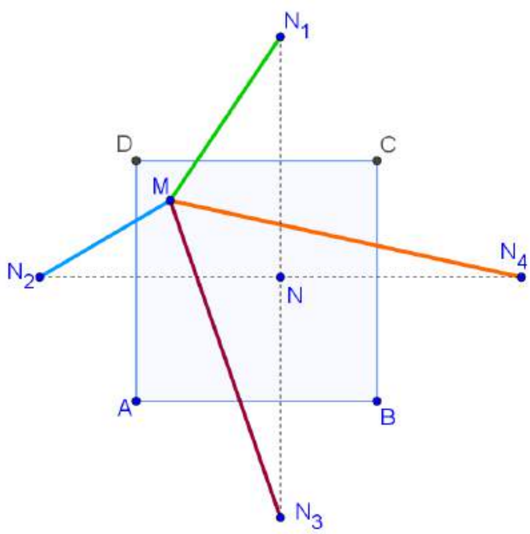
Il nous reste à transposer dans notre drôle de pays le chemin correspondant au chemin $[MN_1]$.



On se dirige vers le côté [DC] jusqu'au point K, intersection de [DC] et $[MN_1]$. On est alors envoyé en K'.
De K', on rejoint le point N.

Ainsi le chemin [MK] puis [K'N], correspondant au chemin $[MN_1]$ est le plus court chemin pour aller du point M au point N, si on se dirige uniquement vers le côté [CD] de notre drôle de pays carré ABCD.
N_1 est l'image du point N par la translation qui envoie B en C.

On fait de même si on se dirige vers [AD], [AB] ou [BC]. Nous obtenons ainsi 4 chemins si on se dirige vers un seul côté de notre pays carré.

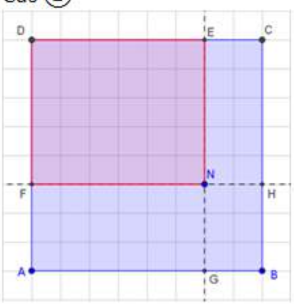


- Le chemin correspondant au chemin vert $[MN_1]$ où N_1 est l'image de N par la translation qui envoie B en C, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le seul côté [CD] du pays ABCD.
- Le chemin correspondant au chemin bleu $[MN_2]$ où N_2 est l'image de N par la translation qui envoie C en D, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le seul côté [AD] du pays ABCD.
- Le chemin correspondant au chemin violet $[MN_3]$ où N_3 est l'image de N par la translation qui envoie C en B, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le seul côté [AB] du pays ABCD.
- Le chemin correspondant au chemin orange $[MN_4]$ où N_4 est l'image de N par la translation qui envoie D en C, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le seul côté [BC] du pays ABCD.

Nous remarquons alors que selon la position du point M par rapport au point N dans ce drôle de pays, deux de ces chemins sont plus courts que les deux autres.

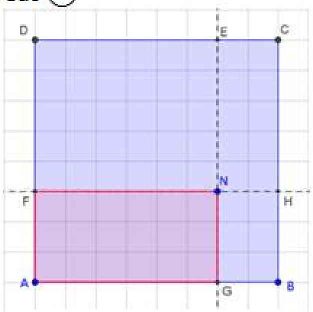
On fixe le point N n'importe où dans le pays carré ABCD.
On trace les perpendiculaires aux côtés du carré ABCD passant par N. Elles déterminent 4 régions possibles pour le positionnement du point M, les rectangles DENF, AGNF, BGNH et CENH.
Nous étudions ces 4 cas possibles.

Cas 1



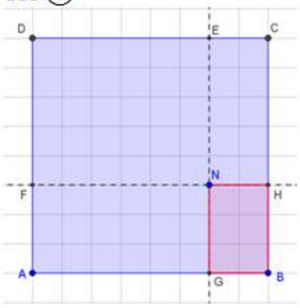
M est un point du rectangle DENF.

Cas 2



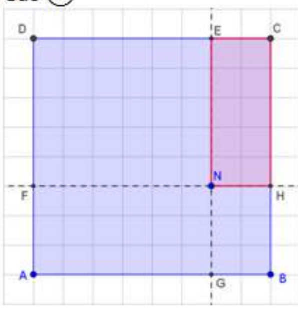
M est un point du rectangle AGNF.

Cas 3



M est un point du rectangle BGNH.

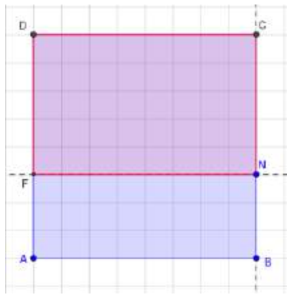
Cas 4



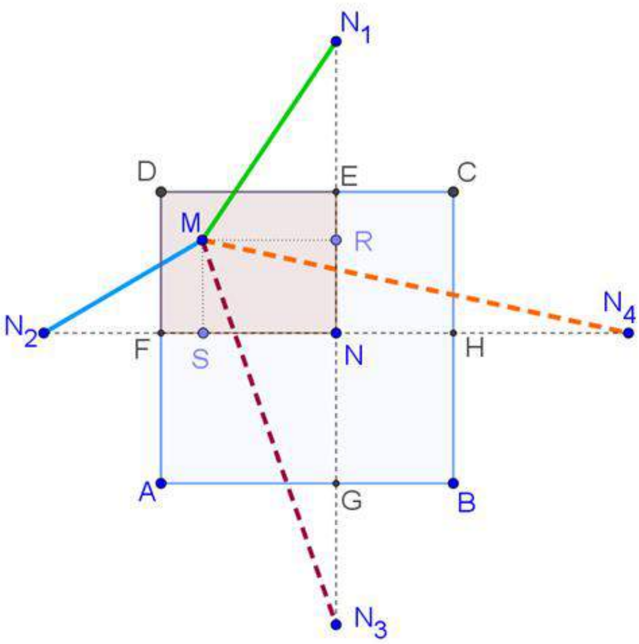
M est un point du rectangle CENH.

<u>Remarque :</u>
Si N est sur un des côtés du carré ABCD, il n'y a que 2 cas.

Par exemple, comme ci-contre, si N est sur le côté [BC], le point M peut être soit dans le rectangle DCNF, soit dans le rectangle ABNF. Il s'agit des cas 1 et 2.



Cas 1



Si M est à l'intérieur du rectangle DENF ou sur les côtés [DE] et [DF] :

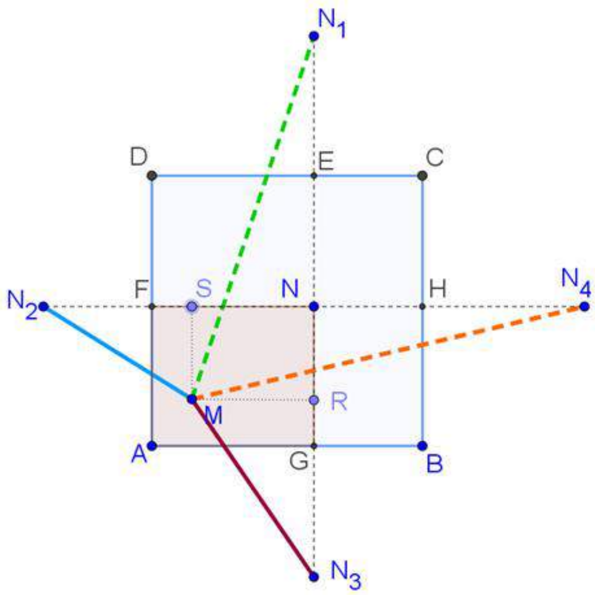
- $MN_1 < MN_3$ car les 2 triangles MRN_1 et MRN_3, rectangles en R, ont le côté [MR] commun et dans MRN_1, $[RN_1]$ est petit que le côté de ABCD alors que dans MRN_3, $[NN_3]$ est plus grand.
- $MN_2 < MN_4$. Comme précédemment, on compare les triangles MSN_2 et MSN_4 rectangles en S, avec [MS] côté commun, $[SN_2]$ plus petit que le côté du carré ABCD alors que $[SN_4]$ est plus grand.

Si M est sur [FN], M différent de N :
$MN_1 = MN_3$ et $MN_2 < MN_4$

Si M est sur [EN], M différent de N :
$MN_2 = MN_4$ et $MN_1 < MN_3$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle DENF, nous ne retenons que les chemins correspondants à $[MN_1]$ et $[MN_2]$.

Cas ②



On fait de même que dans le cas ①.

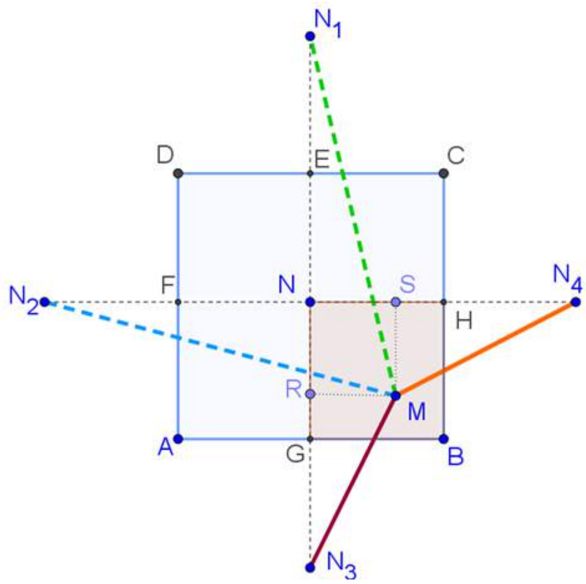
Si M est à l'intérieur du rectangle AGNF ou sur les côtés [AG] et [AF], $MN_2 < MN_4$ et $MN_3 < MN_1$

Si M est sur [FN], M différent de N :
$MN_3 = MN_1$ et $MN_2 < MN_4$

Si M est sur [NG], M différent de N :
$MN_2 = MN_4$ et $MN_3 < MN_1$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle AGNF, nous ne retenons que les chemins correspondants à [MN_2] et [MN_3].

Cas ③



On fait toujours de même que dans le cas ①.

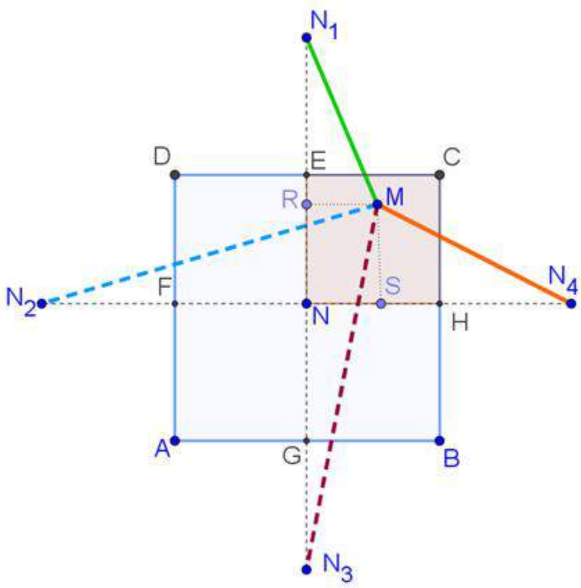
Si M est à l'intérieur du rectangle BGNH ou sur les côtés [BG] et [BH], $MN_3 < MN_1$ et $MN_4 < MN_2$

Si M est sur [NG], M différent de N :
$MN_4 = MN_2$ et $MN_3 < MN_1$

Si M est sur [NH], M différent de N :
$MN_3 = MN_1$ et $MN_4 < MN_2$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle BGNH, nous ne retenons que les chemins correspondants à [MN_3] et [MN_4].

Cas ④



De même, dans ce cas :

Si M est à l'intérieur du rectangle CENH ou sur les côtés [CE] et [CH], $MN_1 < MN_3$ et $MN_4 < MN_2$

Si M est sur [NE], M différent de N :
$MN_4 = MN_2$ et $MN_1 < MN_3$

Si M est sur [NH], M différent de N :
$MN_1 = MN_4$ et $MN_4 < MN_2$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle CENH, nous ne retenons que les chemins correspondants à [MN_1] et [MN_4].

Remarque :

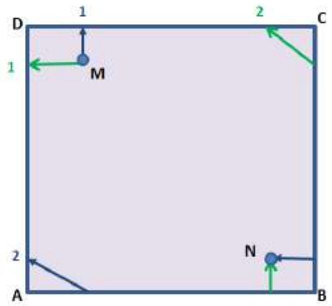
▪ Si M est un point du segment [EN], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle DENF ou du rectangle CENH et retenir les 2 chemins correspondants.

▪ Si M est un point du segment [FN], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle DENF ou du rectangle AGNF et retenir les 2 chemins correspondants.

▪ Si M est un point du segment [NG], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle AGNF ou du rectangle BGNH et retenir les 2 chemins correspondants.

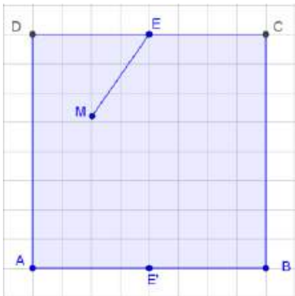
▪ Si M est un point du segment [NH], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle BGNH ou du rectangle CENH et retenir les 2 chemins correspondants.

C'est alors que pour des positions particulières de M et N, nous avons trouvé des chemins encore plus courts en nous dirigeant cette fois vers deux côtés consécutifs de ce drôle de pays comme les chemins bleu et vert sur la figure ci-contre.



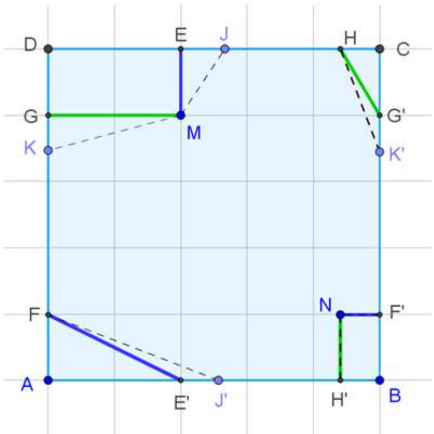
C – En se déplaçant vers deux côtés consécutifs du pays carré ABCD.

Remarque : On ne peut pas se diriger vers 2 côtés opposés du pays ABCD, car dès que l'on se dirige vers un côté, on est immédiatement envoyé sur le côté opposé.



Si on se dirige par exemple vers [CD], on arrive sur le côté opposé en E'.
On ne peut alors que se déplacer vers les côtés [DA] ou [CB], côtés consécutifs de [CD].
Remarque : Cela n'a pas de sens de se diriger vers un point de [DC], on pouvait y aller directement à partir de M.

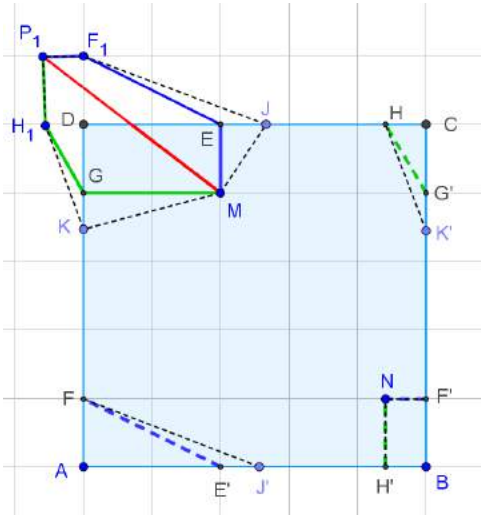
Nous cherchons le plus court chemin pour aller de M à N si on se déplace vers le côté [DC] puis le côté [DA] du pays carré ABCD, ou vers le côté [DA] puis le côté [DC].



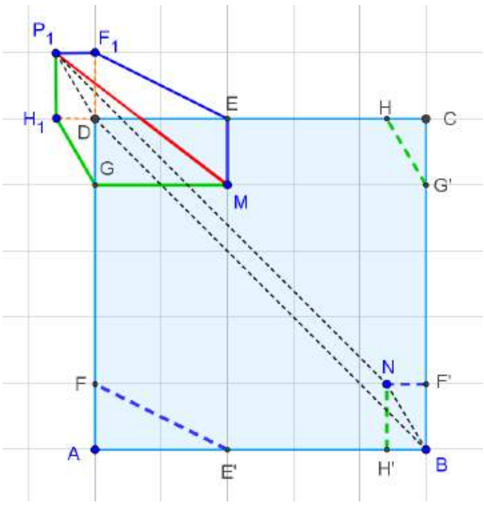
Le chemin bleu [ME], [E'F] puis [F'N] est un chemin obtenu si on se dirige d'abord tout au Nord vers [DC] en E, on est envoyé en E', puis de E' on se dirige vers [DA] en un point F situé sur la perpendiculaire à [DA] passant par N, on est alors envoyé en F' et enfin de F', on rejoint N.
Tout chemin allant vers [DC] à droite de E sera plus long que le chemin bleu comme par exemple le chemin [MJ], [J'F] puis [F'N] en pointillés.

Le chemin vert [MG], [G'H] puis [H'N] est un chemin obtenu si on se dirige d'abord tout à l'Ouest vers [DA] en G, on est envoyé en G', puis de G' on se dirige vers [DC] en un point H situé sur la perpendiculaire à [DC] passant par N, on est alors envoyé en H' et enfin de H', on rejoint N.
Tout chemin allant vers [DA] en dessous de G sera plus long que le chemin vert comme par exemple le chemin [MK], [K'H] puis [H'N] en pointillés.

On a alors construit les chemins bleu, vert et ceux en pointillés dans un même prolongement à partir de M.



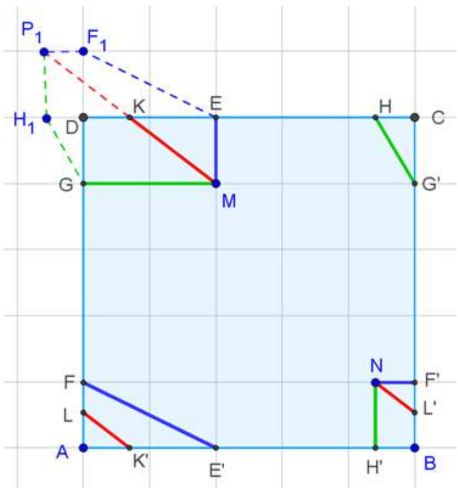
Par construction, tous les chemins aboutissent en un point que nous nommerons P_1.
Mais alors, le plus court chemin pour allez de M à P_1 est le segment $[MP_1]$.



Par construction les rectangles BF'NH' et $DF_1P_1H_1$ sont superposables.

Donc $[DP_1]$ // [BN] et DP_1 = BN, et donc le quadrilatère NP_1DB est un parallélogramme.
P_1 est donc l'image de N par la translation qui envoie B en D.

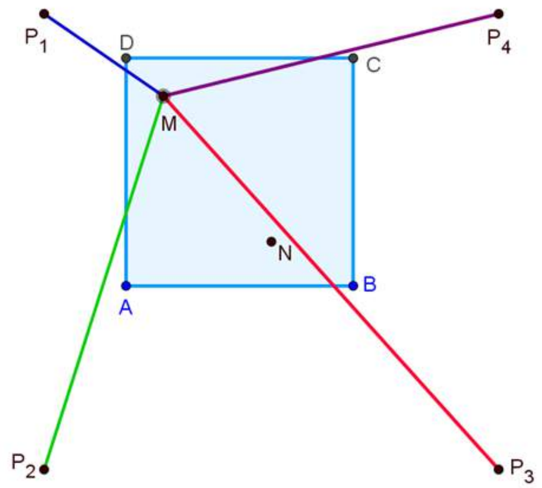
Il nous reste à transposer dans notre drôle de pays le chemin correspondant au chemin $[MP_1]$.



On nomme K le point d'intersection de [CD] et $[MP_1]$.
On se dirige vers [CD] jusqu'en K. On est envoyé alors en K'.
On trace la parallèle à (MP_1) passant par K', elle coupe le côté [DA] en L.
De K', on se dirige donc vers [DA] jusqu'au point L, on est envoyé alors en L'.
De L', on rejoint N.

Ainsi le chemin [MK], [K'L] puis [L'N], correspondant au chemin $[MP_1]$, est le plus court chemin pour aller du point M au point N, si on se dirige vers les deux côté consécutifs [DC] et [DA] de notre drôle de pays carré ABCD.
On dira plus simplement que l'on se dirige vers le sommet D en passant par les deux côtés du pays ABCD issus de D.
P1 est l'image de N par la translation qui envoie B en D.

On fait de même si on se dirige vers les sommets A, B ou C. Nous obtenons alors 4 chemins si on se dirige vers un sommet en passant par les deux côtés issus de ce sommet.



▪ Le chemin correspondant au chemin bleu [MP_1] où P_1 est l'image de N par la translation qui envoie B en D, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le sommet D en passant par les 2 côtés [DA] et [DC] du pays ABCD.

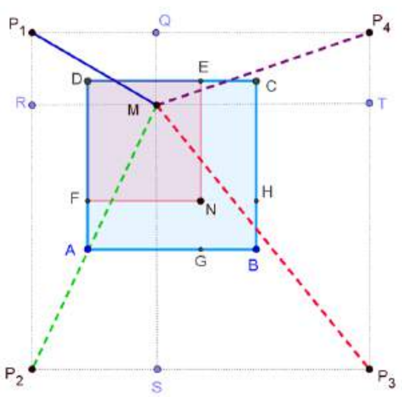
▪ Le chemin correspondant au chemin vert [MP_2] où P_2 est l'image de N par la translation qui envoie C en A, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le sommet A en passant par les 2 côtés [AD] et [AB] du pays ABCD.

▪ Le chemin correspondant au chemin rouge [MP_3] où P_3 est l'image de N par la translation qui envoie D en B, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le sommet B en passant par les 2 côtés [BA] et [BC] du pays ABCD.

▪ Le chemin correspondant au chemin violet [MP_4] où P_4 est l'image de N par la translation qui envoie A en C, est le plus court chemin pour aller de M à N si on se dirige vers le sommet C en passant par les 2 côtés [CD] et [CB] du pays ABCD.

Nous remarquons alors que selon la position du point M par rapport au point N dans ce drôle de pays, un de ces chemins est plus courts que les trois autres.
On reprend les 4 cas possibles de positionnement de M du paragraphe précédent, N étant fixé n'importe où dans le pays carré ABCD.

Cas ①



Si M est à l'intérieur du rectangle DENF ou sur les côtés [DE] et [DF] :

▪ $MP_1 < MP_2$ car dans les triangles MRP_1 et MRP_2 rectangles en R, avec [MR] côté commun, [RP_1] plus petit que le côté du carré ABCD alors que [RP_2] est plus grand.

▪ $MP_1 < MP_4$. Comme précédemment, on compare les triangles MQP_1 et MQP_4 rectangles en Q, avec [MQ] côté commun, [QP_1] plus petit que le côté du carré ABCD alors que [QP_4] est plus grand.

▪ $MP_2 < MP_3$ en comparant les triangles MSP_2 et MSP_3 rectangles en S.

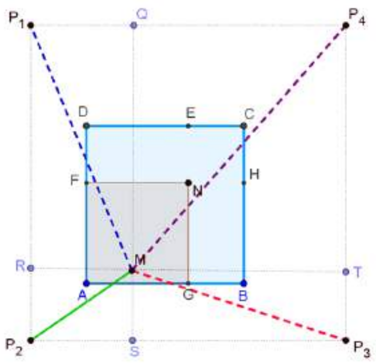
▪ $MP_4 < MP_3$ en comparant les triangles MTP_4 et MTP_3 rectangles en T.

Si M est sur [FN], M différent de N :
$MP_1 = MP_2$ et $MP_1 < MP_4 < MP_3$

Si M est sur [EN], M différent de N :
$MP_1 = MP_4$ et $MP_1 < MP_2 < MP_3$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle DENF, nous ne retenons que le chemin correspondant à [MP_1].

Cas ②



On fait de même que dans le cas ①.

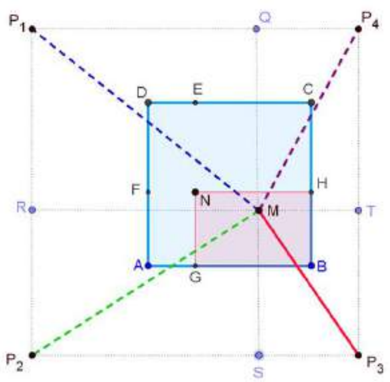
Si M est à l'intérieur du rectangle AGNF ou sur les côtés [AG] et [AF],
$MP_2 < MP_1 < MP_4$ et $MP_2 < MP_3 < MP_4$

Si M est sur [FN], M différent de N :
$MP_2 = MP_1$ et $MP_2 < MP_3 < MP_4$

Si M est sur [NG], M différent de N :
$MP_2 = M_3$ et $MP_2 < MP_1 < MP_4$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle AGNF, nous ne retenons que le chemin correspondant à [MP_2].

Cas ③



On fait toujours de même que dans le cas ①.

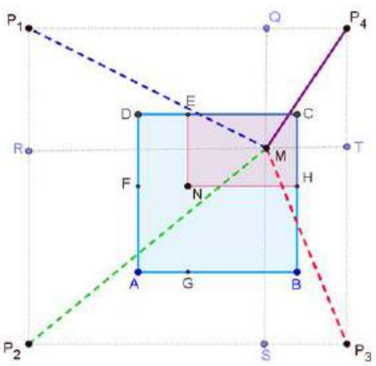
Si M est à l'intérieur du rectangle BGNH ou sur les côtés [BG] et [BH],
$MP_3 < MP_2 < MP_1$ et $MP_3 < MP_4 < MP_1$

Si M est sur [NG], M différent de N :
$MP_3 = MP_2$ et $MP_3 < MP_4 < MP_1$

Si M est sur [NH], M différent de N :
$MP_3 = MP_4$ et $MP_3 < MP_2 < MP_1$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle BGNH, nous ne retenons que le chemin correspondant à [MP_3].

Cas 4



De même dans ce cas :

Si M est à l'intérieur du rectangle CENH ou sur les côtés [CE] et [CH],
$MP_4 < MP_1 < MP_2$ et $MP_4 < MP_3 < MP_2$

Si M est sur [NE], M différent de N :
$MP_4 = MP_1$ et $MP_4 < MP_3 < MP_2$

Si M est sur [NH], M différent de N :
$MP_4 = MP_3$ et $MP_4 < MP_1 < MP_2$

Dans tous les cas, si M est un point du rectangle CENH, nous ne retenons que le chemin correspondant à [MP_4].

Remarque : Comme pour les chemins vers un seul côté du paragraphe B, on remarque que :
- Si M est un point du segment [EN], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle DENF ou du rectangle CENH et retenir le chemin correspondant.
- Si M est un point du segment [FN], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle DENF ou du rectangle AGNF et retenir le chemin correspondant.
- Si M est un point du segment [NG], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle AGNF ou du rectangle BGNH et retenir le chemin correspondant.
- Si M est un point du segment [NH], M différent de N, on peut considérer indifféremment que c'est un point du rectangle BGNH ou du rectangle CENH et retenir le chemin correspondant.

Nous avons alors constaté que si on se dirigeait vers plus de 2 côtés de ce drôle de pays, on pouvait toujours trouver un chemin plus court.

D – En se déplaçant vers plus de deux côtés du pays carré ABCD.

Par exemple, sur la figure 1 ci-contre, on se déplace successivement vers les 3 côtés [DC], [DA] puis [BA].

On peut alors ne se diriger que vers 2 côtés pour raccourcir le chemin, comme sur la figure 2, les 2 chemins en pointillés sont remplacés par le seul chemin en rouge.

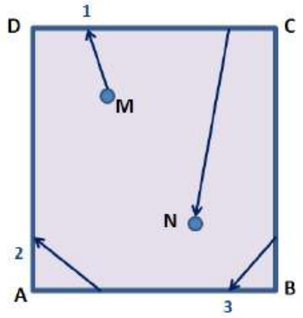


Figure 1

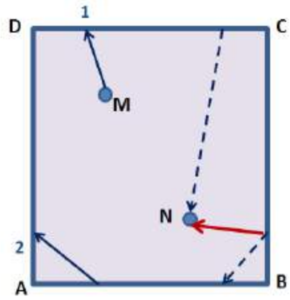


Figure 2

Autre exemple, sur la figure 3, on se déplace successivement vers les 3 côtés [DC], [DA] puis [BA].

On peut ne se diriger que vers le seul côté [AD] pour raccourcir le chemin comme sur la figure 4.

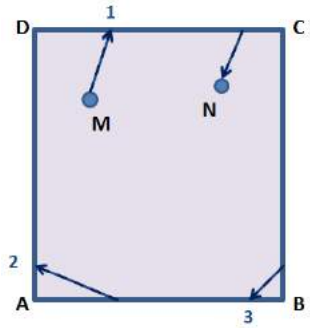


Figure 3

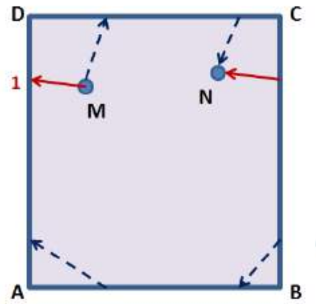


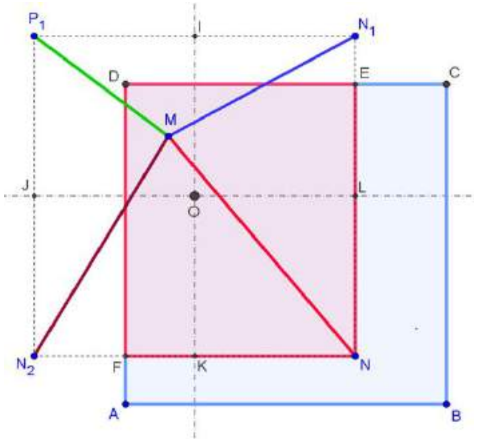
Figure 4

Nous ne nous déplacerons donc pas vers plus de 2 côtés de ce drôle de pays carré ABCD.
Selon les positions relatives de M et N, il nous faut maintenant comparer tous les chemins que nous avons retenus entre eux.

E – Plus court chemin pour aller de M en N dans ce drôle de pays.

Il nous faut alors reprendre les 4 cas envisagés selon la position du point M par rapport au point N.
Nous faisons une étude complète du cas ① et nous donnerons un exemple pour chacun des cas ②, ③ et ④.

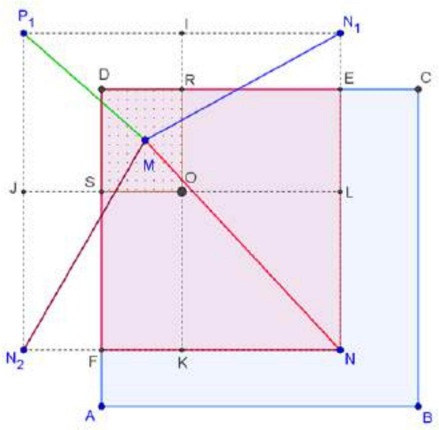
Cas① M est un point du rectangle DENF



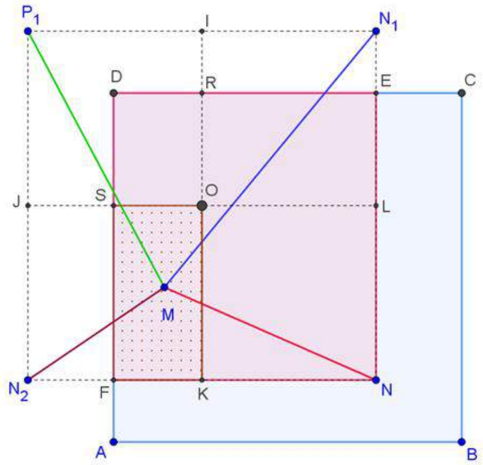
Il faut donc comparer les chemins retenus :
- MN (on ne rencontre aucun côté du pays)
- MN_1 (on se dirige vers [DC] seulement),
- MN_2 (on se dirige vers [DA] seulement),
- MP_1 (on se dirige vers D par les 2 côtés du pays issus de D).

Par construction, $NN_1P_1N_2$ est un carré, on nomme O son centre, (IK) et (JL) les médiatrices des côtés.

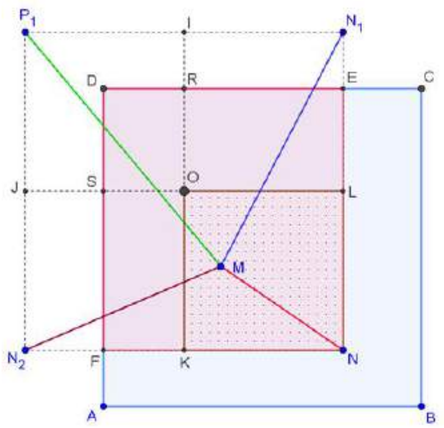
Nous trouvons alors un plus court chemin selon la position de M à l'intérieur de l'un des quadrants OIP_1J, OJN_2K, OKNL ou OLN_1J, ou sur l'un des segments [OI], [OJ], [OK], ou [OL] ou encore si M est en O.



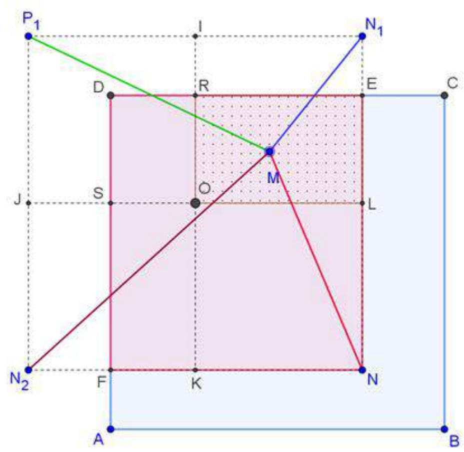
▪ Si M est dans la région sablée ci-dessus, à l'intérieur du quadrant OIP_1J, M est plus proche de P_1 que de N_1, N_2 et N.
Le chemin correspondant à $[MP_1]$ sera le plus court. On se dirigera vers le sommet D en passant par les 2 côtés [DA] et [DC] du pays carré ABCD.



▪ Si M est dans la région sablée ci-dessus, à l'intérieur du quadrant OJN_2K, M est plus proche de N_2 que de N_1, P_1 et N.
Le chemin correspondant à $[MN_2]$ sera le plus court. On se dirigera seulement vers le côté [DA] du pays carré ABCD.



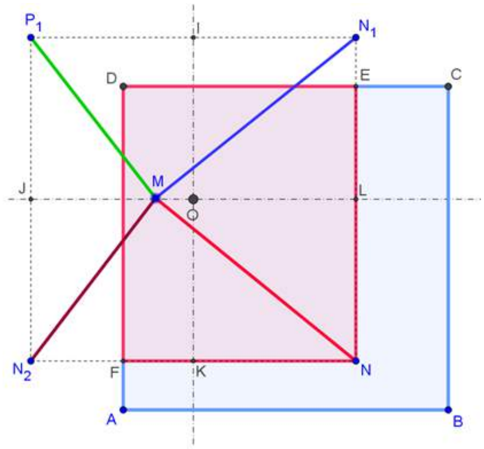
▪ Si M est dans la région sablée ci-dessus, à l'intérieur du quadrant OKNL, M est plus proche de N que de N_1, N_2 et P_1.
Le chemin direct [MN] sera le plus court. On se dirigera directement vers N dans ABCD.



▪ Si M est dans la région sablée ci-dessus, à l'intérieur du quadrant OIN_1L, M est plus proche de N_1 que de P_1, N_2 et N.
Le chemin correspondant à $[MN_1]$ sera le plus court. On se dirigera seulement vers le côté [DC] du pays carré ABCD.

Dans des cas particuliers, nous trouvons qu'il peut y avoir plusieurs chemins possibles.

▪ Si M est un point du segment [OJ] mais différent de O, comme sur la figure ci-contre, M est aussi proche de P_1 que de N_2 car M est un point de la médiatrice de $[P_1N_2]$)
Les chemins correspondants à $[MP_1]$ et à $[MN_2]$ ont la même longueur et sont les plus courts pour aller de M à N. On a le choix de se déplacer soit vers le sommet D en passant par les 2 côtés [DA] et [DC], soit vers le seul côté [DA] de ce drôle de pays.



De même,

▪ Si M est un point de [OL] mais différent de O, M est aussi proche de N_1 que de N car M est un point de la médiatrice de [N_1N].

Le chemin correspondant à [MN_1] et le chemin [MN] ont la même longueur et sont les plus courts pour aller de M à N.

▪ Si M ϵ [OI], mais M différent de O, M est aussi proche de P_1 que de N_1 car M est un pont de la médiatrice de [P_1N_1].

Les chemins correspondants à [MP_1] et [MN_1] ont la même longueur et sont les plus courts pour aller de M à N.

▪ Si M ϵ [OK], mais M différent de O, M est aussi proche de N2 que de N car M est un point de la médiatrice de [N_2N].

Le chemin correspondant à [MN2] et le chemin [MN] ont la même longueur et sont les plus courts pour aller de M à N.

▪ Et enfin, si M est en O, M est à égale distance de N, N_1, N_2 et P1 car O est le centre de symétrie du carré.

Le chemin [MN] et les 3 chemins correspondants à [MN_1], [MN_2] et [MP_1] ont la même longueur et sont les plus courts pour aller de M à N. On peut indifféremment se diriger directement vers N, ou vers le seul côté [DC], ou vers le seul côté [DA] ou enfin vers le sommet D en passant par les 2 côtés [DA] et [DC].

Remarque :

O est le centre de symétrie du carré $N_1P_1N_2N$.

Donc ON = OP_1 = ON_1 = ON_2 = longueur de la demi-diagonale du carré $N_1P_1N_2N$.

Les carrés ABCD et $N_1P_1N_2N$ sont superposables, on a donc :

longueur de la demi-diagonale du carré $N_1P_1N_2N$ = longueur de la demi-diagonale du carré ABCD.

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient : longueur de la demi-diagonale du carré ABCD = AB × $\sqrt{2}/2$.

Nous pouvons donc conclure :

« Un plus court chemin pour aller de M à N, sera toujours inférieur ou égal à AB × $\sqrt{2}/2$ »

Autre remarque :

Selon la position de N dans le pays carré ABCD, O peut être en dehors du pays comme sur la figure ci-contre.

Il n'y a alors que deux cas à envisager :

▪ Si M est dans le rectangle sablé LSDE, à l'intérieur du quadrant OJN_1L, M est plus proche de N_1 que de P_1, N_2 et N.

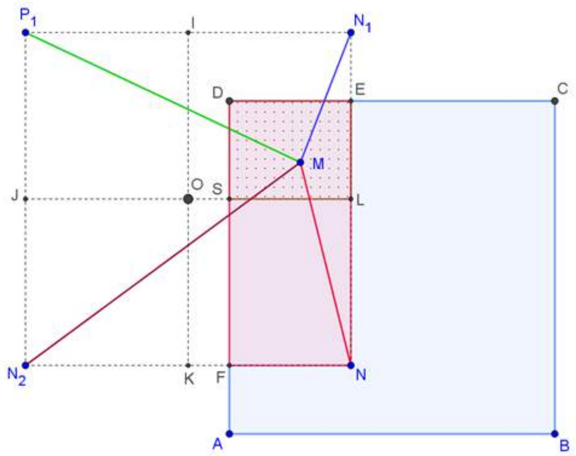
Le chemin correspondant à [MN_1] sera le plus court.

On se dirigera seulement vers le côté [DC] du pays carré ABCD.

▪ Si M est dans le rectangle LSFN, à l'intérieur du quadrant OKNL, M est plus proche de N que de N_1, P_1 et N_2.

Le chemin correspondant à [MN] sera le plus court.

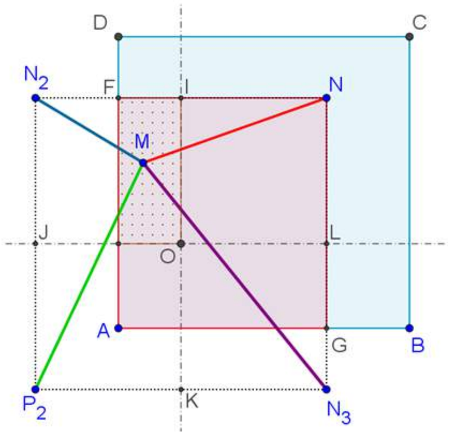
On se dirigera directement vers N sans passer par aucun côté du pays ABCD.



▪ Si M est un pont de [SL], **le chemin correspondant à [MN_1] et le chemin [MN] ont la même longueur et sont les plus courts pour aller de M à N.**

Dans le cas ①, nous avons étudié toutes les possibilités. Nous pouvons donc trouver au moins un plus court chemin pour aller de M à N dans le pays carré ABCD, selon la position de M dans le rectangle DENF par rapport aux médiatrices des côtés du carré $N_1P_1N_2N$ où N_1 est l'image de N par la translation qui transforme B en C, P_1 est l'image de N par la translation qui transforme B en D et N_2 est l'image de N par la translation qui transforme C en D.

Cas ② M est un point du rectangle AGNF, sur un exemple.

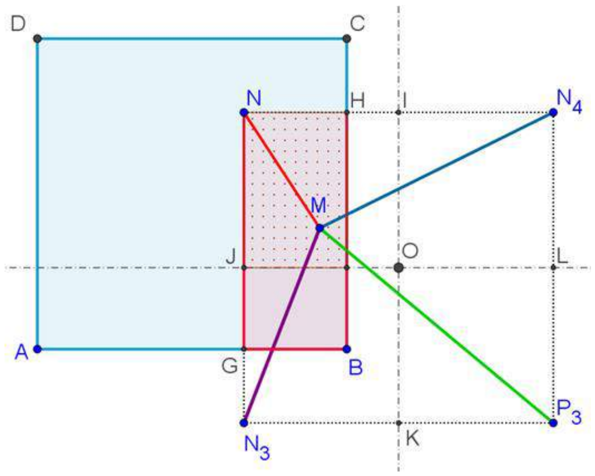


Comme N est un point du rectangle AGNF, on compare les chemins retenus MN_2, MN_3, MP_2 et MN.

Dans le carré $NN_2P_2N_3$, (IK) et (JL) sont les médiatrices des côtés et O est le centre de symétrie.
Dans la figure ci-contre, M est dans la région sablée dans le quadrant OIN_2J, M est donc plus proche de N_2 que de P_2, M_3 et N.

Le chemin correspondant à [MN_2] sera le plus court.
On se dirigera seulement vers le côté [DA] du pays carré ABCD.

Cas ③M est un point du rectangle BGNH, sur un exemple.



Comme M est un point du rectangle BGNH, on compare les chemins retenus MN_3, MP_3, MN_4 et MN.

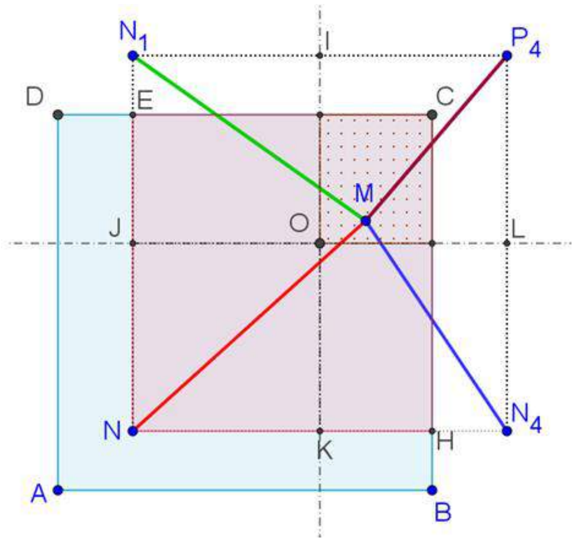
Dans le carré $NN_3P_3N_4$, (IK) et (JL) sont les médiatrices des côtés et O est le centre de symétrie.

Remarque : dans cet exemple O n'est pas dans ABCD.

Dans la figure ci-contre, M est dans la région sablée dans le quadrant OINJ, M est donc plus proche de N que de N_3, P_3 et N_4.

Le chemin correspondant à [MN] sera le plus court.
On se dirigera directement vers N dans ABCD.

Cas ④ M est un point du rectangle CENH, sur un exemple.



Comme M est un point du rectangle CENH, on compare les chemins retenus MN_1, MP_4, MN_4 et MN.

Dans le carré $NN_1P_4N_4$, (IK) et (JL) sont les médiatrices des côtés et O est le centre de symétrie.
Dans la figure ci-contre, M est dans la région sablée dans le quadrant OIP_4L, M est donc plus proche de P_4 que de N_1, N et N_4.

Le chemin correspondant à [MP_4] sera le plus court.
On se dirigera vers le sommet C en passant par les 2 côtés [CB] et [CD] du pays carré ABCD.

Dans ce drôle de pays carré ABCD, nous savons maintenant trouver dans tous les cas, au moins un chemin le plus court possible pour aller d'un point M à point N.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement notre chercheuse Irène Marcovici, pour le choix de ce sujet de recherche et son aide bienveillante tout au long de l'année.

Nous remercions aussi tous ceux qui nous ont permis par leur aide financière, de participer au congrès de Liège :

- la Mairie de Villers lès Nancy
- le Conseil Départemental 54
- le S.I.S. du grand Nancy
- Le rectorat
- L' A.L.P.E. et le F.S.E. du collège George Chepfer.