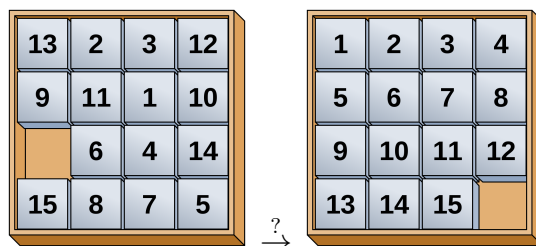


MathsEnJeans

Sujet 4 : l'énigme du taquin

Le jeu du taquin consiste à remettre en ordre le jeu suivant :



À la fin du 19^{ème} siècle un mathématicien britannique offrait la somme de 1000 dollars à celui qui parviendrait à la solution du jeu en partant de la configuration où seuls le 14 et le 15 ont été échangés :



La somme ne fut jamais réclamée... On se propose ici de savoir pourquoi.

Préliminaires

Considérons la ligne suivante :

2	4	1	3
---	---	---	---

On appelle *nombre d'inversions* le nombre de fois où deux paires de nombres quelconques ne sont pas dans le bon ordre. Par exemple la paire (2, 1) présente une inversion, ainsi que (4, 3). En revanche (2, 4) ne présente pas d'inversion.

Question 1 : Expliquer *comment* compter le nombre exact d'inversions dans une telle ligne.

Question 2 : on suppose que l'on cherche à remettre cette ligne en ordre croissant :

1	2	3	4
---	---	---	---

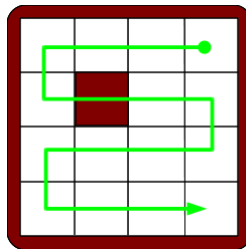
en procédant de proche en proche, c'est à dire par une suite d'opérations appelées *échanges* dont chacune consiste à échanger deux nombres côte à côte. Y a-t-il une seule façon de procéder ? Y a-t-il tout de même un lien entre le nombre d'échanges pour remettre la ligne en ordre et le nombre d'inversions de départ ?

Retour à la question initiale

Reprenons l'exemple suivant :

13	2	3	12
9	11	1	10
	6	4	14
15	8	7	5

et lisons cette configuration en serpentant à partir du coin en haut à droite comme ceci (la case vide n'est pas au bon endroit) :



pour obtenir :

12	3	2	13	9	11	1	10	14	4	6	15	8	7	5
----	---	---	----	---	----	---	----	----	---	---	----	---	---	---

Question 3 : À combien le déplacement d'une case dans le jeu fait-il correspondre d'échanges successifs dans la ligne ci-dessus ?

Question 4 : En considérant la configuration du taquin proposée par le mathématicien et en appliquant les outils développés sur les exemples précédant, que peut-on conclure ?