



Sujet de recherche MATH.en.JEANS 2014  
Lycée français de Varsovie  
**LES ÎLES D'ENTIERS SINGULIERS**

$n$  entier « **singulier** » si et seulement si  $n$  n'est pas divisible par le carré d'un entier différent de 1. ( $n \geq 1$ )

Par exemple, 13, 17, 19 sont singuliers, et plus généralement tout nombre premier est singulier. Mais 14, 15, 30 sont aussi des nombres singuliers. Par contre, 18 n'est pas singulier car 18 est divisible par  $3^2$ . 20 n'est pas singulier car 20 est divisible par  $2^2$  ou encore 343 n'est pas singulier car 343 est divisible par  $7^2$ .

*Les nombres singuliers surlignés ci-dessous forment des « îles ».*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, ...

Une « **île d'entiers singuliers** » est une suite  $p, p + 1, \dots, k$  telle que :

- $p, p + 1, \dots, k$  sont des entiers consécutifs singuliers
- $p - 1$  et  $k + 1$  ne sont pas des entiers singuliers

Une île composée de  $m$  nombres est **une île de longueur  $m$**  .

*On cherche à étudier les différents types d'îles ainsi que leur répartition dans l'ensemble des entiers naturels.*

Questions :

- a) Déterminer toutes les longueurs possibles d'îles de nombres singuliers.
- b) Pour chacune d'elles, déterminer s'il y a ou non une infinité d'îles de cette longueur. *On étudiera au moins les suites d'îles de longueur 1 et celles de longueur 2.*
- c) Pour  $n$  assez grand, créer un programme afin d'obtenir une image des îles de nombres singuliers. Analyser cette image afin de formuler d'autres conjectures sur la répartition des îles de nombres singuliers dans l'ensemble des naturels. Démontrer vos conjectures.