

## MATH EN JEANS 2018-2019

**Construction de nombres.** On dispose d'une corde d'une certaine longueur (qui sera notre longueur unité :  $\ell = 1$ ) et de clous. On se demande quelles sont les longueurs que nous pouvons construire avec tout ça.

- (1) Tout d'abord, sans les clous. Quelles longueurs peut-on construire juste avec la corde ? Par exemple on peut plier la corde en deux pour faire la longueur  $1/2$ . On peut recommencer et faire la longueur  $1/4$ . Quoi d'autre ?
- (2) Maintenant pouvez-vous trouver des utilisations des clous pour faire de nouveaux nombres ? Peut-on faire la longueur  $1/3$  ? Peut-on faire une racine carrée ?
- (3) En fait on peut démontrer mathématiquement que l'on ne peut pas obtenir le nombre  $\pi$  de cette manière. Mais on peut l'approcher. Pouvez-vous trouver une méthode pour construire approximativement  $\pi$  (sans connaître aucune décimale de  $\pi$  et sans aucun calcul) ?

*Défi* : et  $\pi^2$  ou  $\sqrt{\pi}$  ?

À vous de trouver de nouvelles questions et d'y répondre !

**Un diamant à gagner.** On commence avec un jeu classique qui était en fait un jeu télévisé américain. Vous avez trois boîtes fermées devant vous ; l'une d'elles renferme un diamant, alors que les deux autres sont vides. Le but du jeu est évidemment de gagner le diamant. Le présentateur vous demande alors de choisir une boîte au hasard, sans l'ouvrir. Vous faites votre choix. Ensuite le présentateur, qui sait où est caché le diamant, va ouvrir une des deux autres boîtes (il choisira toujours une boîte différente de celle que vous avez choisie, et il choisira toujours une boîte vide).

Il vous montre qu'elle est bien vide, et vous demande : "Voulez-vous conserver ce choix ou bien changer ?"

**Question** : Que faites-vous, quelles sont vos chances de gagner ?

Passons maintenant à plusieurs variantes.

- a) Dans cette première variante, on suppose que le présentateur ne sait pas où est le diamant. Il ouvre une des deux boîtes que vous n'avez pas choisies. Si c'est le diamant, on recommence le jeu à zéro, (et on peut le recommencer plusieurs fois jusqu'à ce qu'il ouvre une boîte vide) sinon il vous pose la même question : "Voulez-vous conserver ce choix ou bien changer ?". Que répondez-vous ?
- b) La deuxième variante est comme la première sauf qu'on ne peut recommencer le jeu qu'une seule fois : si le présentateur tombe sur le diamant à la deuxième tentative, le joueur a perdu.
- c) Dans la deuxième variante, au lieu de s'arrêter à la deuxième tentative on pourrait s'arrêter au bout de 3 tentatives, ou bien 4... Quelles sont les nouvelles probabilités de gagner ?
- d) Question bonus : Pouvez-vous utiliser vos calculs de probabilités pour calculer la somme infinie  $1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots$  ?

À vous de trouver d'autres variantes à étudier !

**Le casse-tête des Tours de Hanoi.** On considère des disques de diamètres différents empilés pour former une tour à l'emplacement  $A$  dans la figure 1 ci-dessous. Ils sont empilés du plus grand au plus petit. On veut déplacer cette tour à l'emplacement  $C$ , mais il y a quelques contraintes :

*On ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois. On a le droit de déplacer le disque du dessus situé à n'importe quel emplacement  $A, B, C$  sur un autre emplacement  $A, B, C$  mais on ne peut pas poser un disque qui est plus gros au dessus d'un disque plus petit.*

Dans la version classique il y a 8 disques mais pour nous, les mathématiciens, le nombre de disques sera un nombre entier  $n$  quelconque.

- (1) Pouvez-vous résoudre ce casse-tête ?
- (2) Quel est le nombre de coups minimal qu'il faut pour pouvoir le résoudre ?
- (3) Imaginons qu'on puisse aussi utiliser un quatrième emplacement  $D$  pour s'aider, pourrait on résoudre le casse-tête plus vite ? Combien de coups faudrait-il au minimum dans ce cas ?

Départ :



Arrivée :

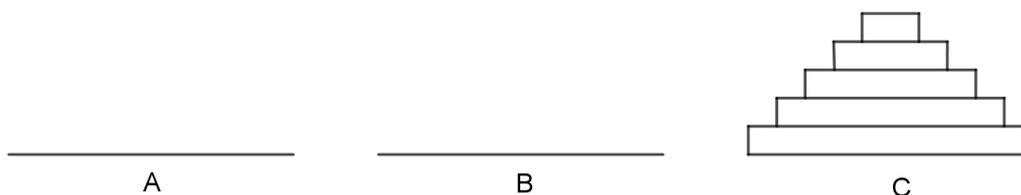


Figure 1. Tours de Hanoi

**Les fous du volant.** On s'intéresse à une course de voitures sur un circuit (par exemple MarioKart). La course dure plusieurs tours. Au début de chaque tour les pilotes sont classés dans un certain ordre. Un individu extérieur (appelons le Diabolo) truque la course pour contrôler le classement final. Voici comment il s'y prend. Il est caché dans un buisson proche de la piste et à chaque tour, quand tous les concurrents sont à l'autre bout du circuit il peut faire l'une des deux actions suivantes :

- A. Soit il peut placer une peau de banane sur la piste pour que le premier concurrent qui arrive au tour suivant glisse dessus et passe second ;
- B. Soit il peut mettre quelques clous sur la piste pour que le premier qui arrive au tour suivant crève et doive changer ses roues. Le premier passe alors dernier.

Il n'y a aucun autre changement de classement que ceux dictés par Diabolo : les voitures roulent toutes à la même vitesse. Si Diabolo choisit correctement ses actions à chaque tour peut-il vraiment changer le classement comme il l'entend, au bout de suffisamment de tours ? Que se passe-t-il si Diabolo met des clous à chaque tour ? On peut commencer sur des situations faciles où il n'y a que trois ou quatre voitures puis essayer avec plus de voitures ?

À vous d'imaginer d'autres actions possibles pour Diabolo, et des questions similaires.