

Supporteur de foot 1,000,000 de supporteurs d'un club de foot vont regarder un match. Ils sont placés dans un carré de taille 1000×1000 dans le stade. Chaque supporteur est doté de points de fidélité. Un supporteur est dit très fidèle si il a strictement plus de points de fidélité que trois de ses 4 voisins (devant, arrière, à gauche et à droite). Comment organiser les points de fidélité des supporteurs de façon qu'il y ait le maximum de supporteurs très fidèles ? Évidemment, les supporteurs qui sont placés au bord ont moins de voisins.

- On pourra commencer par regarder le cas 2×2 et 3×3 .

Passager distrait 100 voyageurs s'apprêtent à monter dans un avion contenant 100 places numérotées, chacun étant muni d'un billet avec réservation. Le premier passager, un peu distrait, ne regarde pas le numéro de sa réservation et prend une place au hasard. Les passagers suivants, quand ils entrent dans l'avion, s'asseyent alors à leur place réservée si celle-ci est encore libre, et sinon prennent une place au hasard parmi celles qui restent. On s'intéresse à la probabilité que le dernier voyageur à entrer s'asseye à la place qu'il avait réservée.

Le retour de la randonnée Un randonneur va voir 3 sites A, B, C situés dans le plan. Il part de chez lui, noté X . Il a pris le chemin suivant : il va en ligne droite de X à A , puis de A à B , puis de B à C . Une fois qu'il est arrivé à C , il voulait rentrer à X , mais il n'a pas trop envie de refaire le même parcours.

Heureusement il a marqué les milieux de chaque voyage dans son plan, c'est-à-dire M_1 le milieu de XA , M_2 le milieu de AB et M_3 le milieu de BC . Notre randonneur intelligent va prendre le retour comme suit : Il part de C vers M_3 , une fois arrivé à M_3 , il continue tout droit, jusqu'à marcher une distance égale à ce qu'il vient de parcourir, puis il s'oriente vers M_2 . De la même façon, quand il est arrivé à M_2 , il continue tout droit pour une distance égale à celle qu'il a parcourue depuis son dernier virage. Puis il s'oriente vers M_1 , et continue après M_1 pour une distance égale à celle qu'il a parcourue depuis son dernier virage.

- Expliquer pourquoi ce randonneur est vraiment intelligent.

Conduction de la chaleur dans un graphe Un graphe Γ est un couple (S, E) où S désigne un ensemble de points (les sommets du graphe) et E ses arêtes, qui relient certains sommets. Les extrémités d'un arbre sont ses sommets desquels ne sort qu'une seule arête (elles sont notées ∂S).

Une distribution de température sur un arbre est une fonction $T : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété de la moyenne : la valeur de T en un sommet coïncide avec la moyenne de T sur ses sommets voisins. On s'intéresse au problème de déterminer la distribution de température sur un arbre donné lorsqu'on impose les valeurs de la température aux extrémités du graphe (on notera $T_\partial : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction température sur les extrémités du graphe).

Étant donnée une extrémité e de ∂S , on s'intéresse à la distribution de température T_e sur le graphe lorsqu'on impose que T_∂ vaut 1 en e et 0 en les autres extrémités.

- Trouver une distribution de température T_e lorsque le graphe est rectiligne.

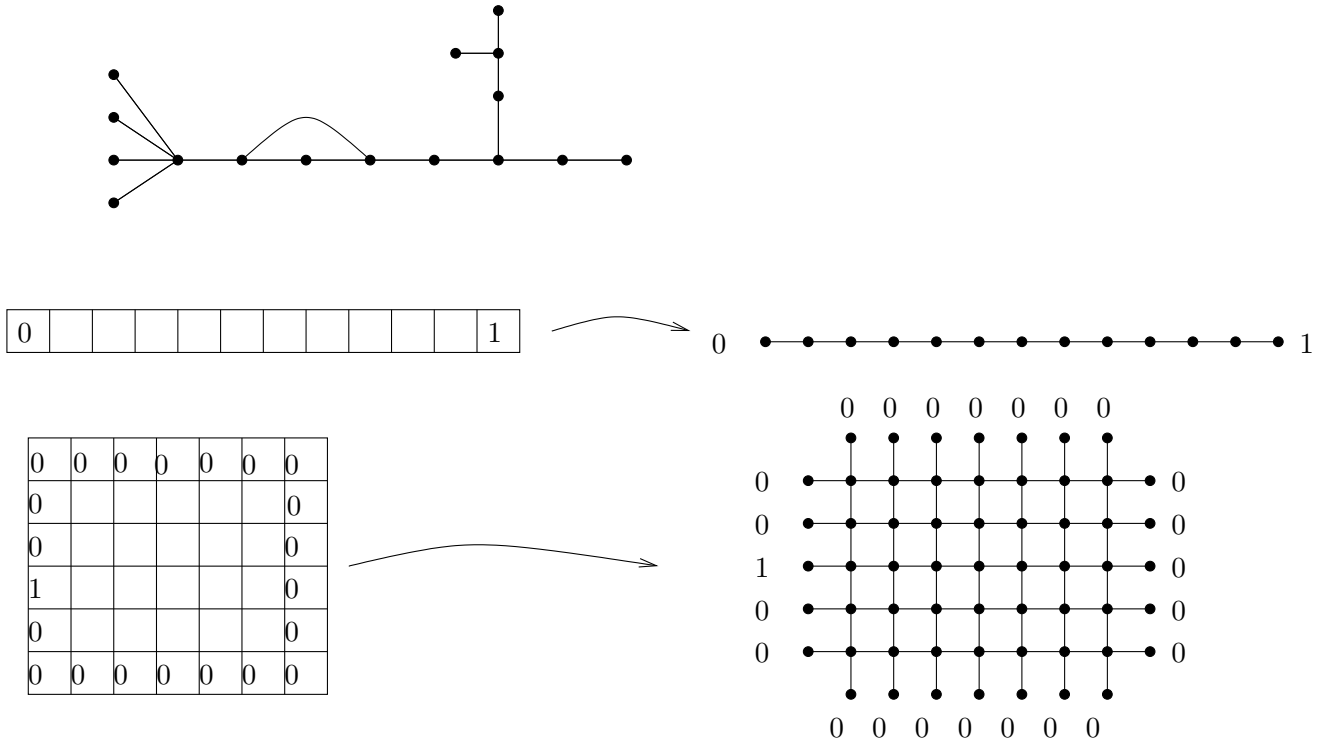


Figure 1: Des exemples de graphes