

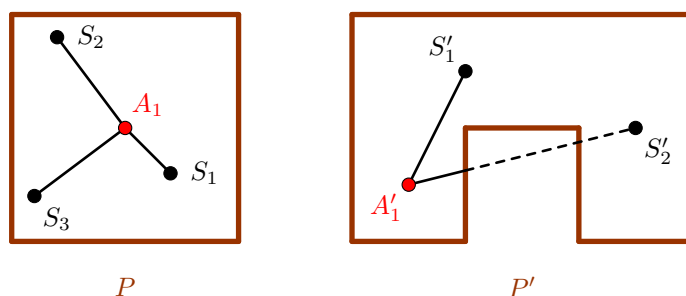
## La nuit au musée

### Le problème

On considère le problème suivant : un conservateur de musée souhaite faire garder une pièce en forme de polygone par des gardiens qui seront postés à un endroit fixe dans la pièce (assis sur une chaise par exemple), mais avec la possibilité de pivoter sur eux-mêmes afin de regarder dans toutes les directions. Le conservateur souhaite que chaque recoin de la pièce soit dans la ligne de vision d'au moins un gardien pour que la pièce soit parfaitement surveillée. Cependant, pour des raisons de budget, il souhaite employer le plus petit nombre de gardiens possibles.

### Modélisation du problème

Plus précisément, on représente la pièce à garder par un polygone  $P$ , et la position des différents gardiens est représentée par des points  $A_1, A_2, A_3, \dots$  à l'intérieur du polygone  $P$ . Les gardiens peuvent voir dans toutes les directions en ligne droite, tant qu'un mur ne leur bloque pas la vue. Les exemples suivants illustrent ces principes.



Dans la première pièce  $P$  qui est un carré, le gardien représenté par le point  $A_1$  peut surveiller l'intégralité de la pièce seul. Cependant, dans la seconde pièce  $P'$ , le gardien représenté par le point  $A'_1$  tel qu'il est placé ne peut pas surveiller la pièce car il n'a pas dans son champ de vision le point  $S'_2$ .

### Objectif principal

On se propose d'essayer de répondre à la question suivante :

*Étant donnée une pièce représentée par un polygone  $P$  possédant  $n$  côtés, peut-on prévoir en fonction de  $n$  combien de gardiens **au maximum** seront nécessaires pour garder la pièce ?*

On pourra commencer par explorer les questions suivantes avant d'essayer d'aborder le problème dans sa généralité :

- ◇ Pour quelles valeurs de  $n$  peut-on construire une pièce à  $n$  côtés ne nécessitant qu'un seul gardien pour être entièrement surveillée ?
- ◇ Est-il possible de construire une pièce à 3, 4 ou 5 côtés nécessitant au moins deux gardiens pour être entièrement surveillée ?
- ◇ Quel est le plus petit nombre  $n$  tel qu'il soit possible de construire une pièce à  $n$  côtés nécessitant au moins 2 gardiens pour être entièrement surveillée ? Même question pour 3 puis pour 4 gardiens ?

## Autres pistes de recherche

Dans un second temps, vous pourrez explorer une ou plusieurs des pistes de recherche suivantes au choix et expliquer que devient la réponse au problème dans les cas suivants :

- ◇ Si l'on impose que tous les angles de la pièce soient des angles droits ?
- ◇ Si l'on autorise désormais les gardiens à patrouiller le long d'un mur ?
- ◇ Si l'on suppose que les gardiens ne peuvent voir qu'à une distance au plus  $R > 0$  du point où ils se tiennent ?
- ◇ Si les gardiens doivent désormais surveiller l'extérieur de la pièce au lieu de l'intérieur ?

Vous êtes également libres (et même encouragés !) de proposer vos propres pistes de recherche.