

Permutations aléatoires sans point fixe

On ordonne au hasard un ensemble de n jetons numérotés de 1 à n . On dit que l'on a ainsi réalisé une *permutation aléatoire* de l'ensemble des jetons rangés dans l'ordre naturel de 1 à n . On les range dans ce nouvel ordre sur des places numérotées de 1 à n . On voudrait obtenir la probabilité qu'aucun jeton ne se retrouve sur une place ayant même numéro que lui (probabilité que la permutation aléatoire n'ait aucun point fixe). On s'intéresse aussi à l'évolution de la valeur de cette probabilité pour les grandes valeurs de n .

Pistes proposées

1. Trouver une formule pour le nombre total de permutations possibles.
2. Comment simuler une permutation aléatoire ?
3. Calculer la probabilité que le jeton 3 se retrouve sur la place n° 3.
4. Par exemple pour $n = 6$, quelle est la probabilité que les jetons 2, 3 et 5 se retrouvent chacun sur la place ayant même numéro que lui (probabilité que 2, 3 et 5 soient des points fixes de la permutation).
5. Si A , B et C sont trois évènements, comment exprimer la probabilité de $A \cup B \cup C$ à l'aide des probabilités de A , B , C et de leurs intersections deux à deux et celle des trois ? Même question pour 4 évènements. Généraliser.

Prolongements éventuels

À partir de la probabilité que la permutation ait zéro point fixe, on pourra calculer la probabilité qu'elle en ait un seul, qu'elle en ait exactement 2 points, etc. et expliquer mathématiquement ce que montrent les simulations.