

« Groupes d'amis » sur un réseau social

Le réseau social *Farce-bouc* offre à ses membres une fonctionnalité « Amis » que deux membres du réseau activent lorsqu'ils se connaissent suffisamment. En vue d'étendre les possibilités de cette fonctionnalité, un ingénieur de *Farce-bouc* s'intéresse aux « groupes d'amis » et, inversement, aux « groupes d'inconnus » ainsi constitués sur l'ensemble du réseau.

Exemple : Hélène Capra, Pierre Goat et Paul Yago, inscrits tous trois sur *Farce-bouc*, y forment un « groupe d'amis » si Hélène et Pierre se connaissent, Pierre et Paul se connaissent aussi, et de même pour Hélène et Paul. Inversement, ils constituent un « groupe d'inconnus » si Hélène et Pierre ne se connaissent pas, Pierre et Paul ne se connaissent pas non plus, ni même Hélène et Paul. ■



- (1) L'ingénieur observe que, à chaque fois qu'il choisit 6 membres du réseau au hasard, il y trouve un groupe d'au moins 3 amis ou un groupe d'au moins 3 inconnus. Expliquer ce phénomène.
- (2) Le même phénomène aura-t-il lieu si l'ingénieur choisit 5 membres plutôt que 6 ?
- (3) Soucieux de mieux comprendre ce phénomène, l'ingénieur décide de noter $R(a, i)$ le nombre minimal de membres qu'il faut choisir pour qu'on observe toujours parmi ceux-ci un groupe d'au moins a amis ou un groupe d'au moins i inconnus. Déterminer le nombre $R(a, i)$ pour de petites valeurs de a et i .
- (3) Montrer que $R(a, i)$ est un nombre fini et donner une majoration pour ce nombre. En déduire $R(a, i)$ pour quelques autres petites valeurs de a et i .
- (4) Afin de mieux rendre compte de la nature des relations entre les membres du réseau, les administrateurs de *Farce-bouc* décident d'affiner la fonctionnalité « Amis ». Ainsi, lorsque deux membres déclarent sur le réseau qu'ils se connaissent, ils devront préciser s'ils sont de véritables amis, camarades de classe, membres d'une même famille, etc. (Un nombre fini de possibilités est proposé.) Est-il encore vrai que, pour tous nombres v, c, f, \dots, i , l'ingénieur observera toujours un groupe d'au moins v véritables amis, ou un groupe d'au moins c camarades de classe, ou un groupe d'au moins f membres de famille, ..., ou un groupe d'au moins i inconnus dès lors qu'il choisira un nombre suffisamment grand de membres du réseau ?