

LES MATHÉMATIQUES DU SUDOKU

Voici une grille de sudoku¹ (tirée de l'Obs) ainsi que la solution.

Grille du jour niveau diabolique

Grille N° 2319 - diabolique

4			3		9		7	
				6		1		
8			1		5		9	
	5		7					
1			2		8			7
					6		5	
	8		6		1			5
		9		3				
	7		5		2			3

Grille du jour niveau diabolique

Grille N° 2319 - diabolique

4	1	2	3	8	9	5	7	6
9	3	5	4	6	7	1	8	2
8	6	7	1	2	5	3	9	4
2	5	8	7	4	3	6	1	9
1	9	6	2	5	8	4	3	7
7	4	3	9	1	6	2	5	8
3	8	4	6	7	1	9	2	5
5	2	9	8	3	4	7	6	1
6	7	1	5	9	2	8	4	3

La règle consiste à placer dans chaque carré 3×3 , chaque ligne et chaque colonne, les chiffres de 1 à 9 une et une seule fois. On parlera par extension de mini-sudoku pour une grille 4×4 avec les mêmes propriétés et de super-sudoku pour une grille 16×16 .

Vous vous êtes peut être demandé quelles sont les mathématiques qui se cachent derrière ces énigmes, comment construire de telles grilles, etc? On sait malheureusement bien peu de choses sur ce sujet. On ne sait même pas compter le nombre de grilles de super-sudoku. Pour le sudoku, la seule méthode connue est d'énumérer toutes les possibilités avec un ordinateur.

Plusieurs questions se posent. La première est bien sûr de **construire des grilles complètes de sudoku**. Voici un exemple pour le mini-sudoku. Comment faire pour le sudoku et le super-sudoku ?

1. contrairement à ce qu'on croit en général, ce jeu n'est pas japonais et était connu à la fin du 19^{ème} siècle même s'il est devenu très populaire à partir de 2004.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

C'est la seule construction systématique que j'ai réussie à imaginer et qui permette de montrer l'existence de grilles de sudoku $n^2 \times n^2$ pour tout entier n . Peut-on envisager d'autres constructions ?

Le fabricant de sudoku est confronté à une autre problématique. Il faut qu'il y ait **une seule façon de compléter la grille**² sinon l'utilisateur pourrait avoir une autre solution que celle donnée par le fabricant. Il pourrait alors croire que sa solution est fautive même si elle est juste. Il est bien évident qu'étant donné une grille complète, si on enlève une case, on saura compléter la grille d'une seule façon. Qu'en est-il pour 2, 3, 4, 5, etc... ? On ne connaît pas le nombre de grilles incomplètes amenant à une unique solution. On pourrait essayer de trouver un algorithme et de le programmer pour le mini-sudoku.

2. C'est l'un des critères que doit vérifier un sudoku bien fait mais ce n'est pas toujours le cas en pratique.