

Sujet Math en Jeans 2019: Financement du déplacement au congrès Math en Jeans par la vente de gâteaux

Yvan Le Borgne

Septembre 2018

Le problème

Le proviseur du collège vous a autorisé vendre tout les jours des gâteaux à l'entrée du collège pour financer votre voyage au congrès math en jean. Taquin, il a simplement exigé que les prix de vente de chaque gâteau soit un nombre entier de francs¹ de 1 à 6 francs et pour des raisons de santé publique que chaque collégien achète au plus un gâteau par jour. Généreux, il vous a fait don de réserves pour l'instant inépuisables et non-périssables de gâteaux de k sortes numérotées de 1 à k .

Chacun des n collégiens qui franchit la porte du collège est un de vos client potentiel. On modélise sommairement le comportement du collégien i grâce à une fonction d'utilité qui donne une évaluation en francs qu'il attribue à chaque sorte de gâteau: ainsi pour la sorte de gâteau j , le collégien lui attribue l'utilité de $u_i(j) := u_{i,j}$ francs, une valeur comprise entre 0 et 5 francs.

Par exemple, pour un collège de quatre élèves avec les trois sortes de gâteaux, l'utilité de chaque sorte pour chaque élève peut se représenter par le tableau suivant.

| Sorte j de gâteau | 1 | 2 | 3 |
|---------------------|-----|-----|-----|
| <i>Alice</i> | 5Fr | 2Fr | 3Fr |
| <i>Bob</i> | 1Fr | 1Fr | 5Fr |
| <i>Claire</i> | 2Fr | 5Fr | 3Fr |
| <i>Denis</i> | 1Fr | 2Fr | 1Fr |

On suppose que ces utilités ne changent pas au cours de l'année, mais a priori vous ne les connaissez pas.

Chaque matin, vous avez la possibilité de fixer les prix de chaque sorte de gâteau, la sorte j à le prix de vente v_j avec $1 \leq v_j \leq 6$.

Par exemple le premier matin vous avez fixé les prix suivants:

| Sorte j de gâteau | 1 | 2 | 3 |
|---------------------|-----|-----|-----|
| Prix de vente v_j | 2Fr | 3Fr | 2Fr |

On suppose que tout les collégiens aiment bien "faire la meilleure affaire" plus que manger leur gâteau préféré. On décide de modéliser leur comportement d'achat par la règle suivante. Le collégien i considère son éventuel bénéfice sur le gâteau de sorte j

$$b_{i,j} := u_i(j) - v_j$$

c'est à dire son utilité selon son estimation moins son prix. Parmi les éventuelles sortes de gâteau pour lesquelles son bénéfice n'est pas strictement négatif, le collégien i choisi celui qui lui assure un bénéfice maximal. Si plusieurs sortes lui apporte le bénéfice maximal, il choisi la sorte j la plus petite.

Sur l'exemple, les bénéfices des collégiens sont

¹anciens ou nouveau

| Sorte j de gâteau | 1 | 2 | 3 |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|
| <i>Alice</i> | $5 - 2 = 3Fr$ | $2 - 3 = -1Fr$ | $3 - 2 = 1Fr$ |
| <i>Bob</i> | $1 - 2 = -1Fr$ | $1 - 3 = -2Fr$ | $5 - 2 = 3Fr$ |
| <i>Claire</i> | $2 - 2 = 0Fr$ | $5 - 3 = 2Fr$ | $3 - 2 = 1Fr$ |
| <i>Denis</i> | $1 - 2 = -1Fr$ | $2 - 3 = -1Fr$ | $1 - 2 = -1Fr$ |

donc Alice achète le gâteau de sorte 1 pour 2Fr, Bob celui de sorte 3 pour 2Fr, Claire celui de sorte 2 pour 3Fr et Denis n'achète rien.

On suppose que le collègue va ouvrir T jours, par exemple $T = 100$ avant votre congrès.

Quelle stratégie envisagez vous pour gagner un maximum d'argent ?

Remarque culturelle: Ce problème ressemble par son compromis entre exploration et exploitation au problème des bandits manchots. (Multi-armed bandit)