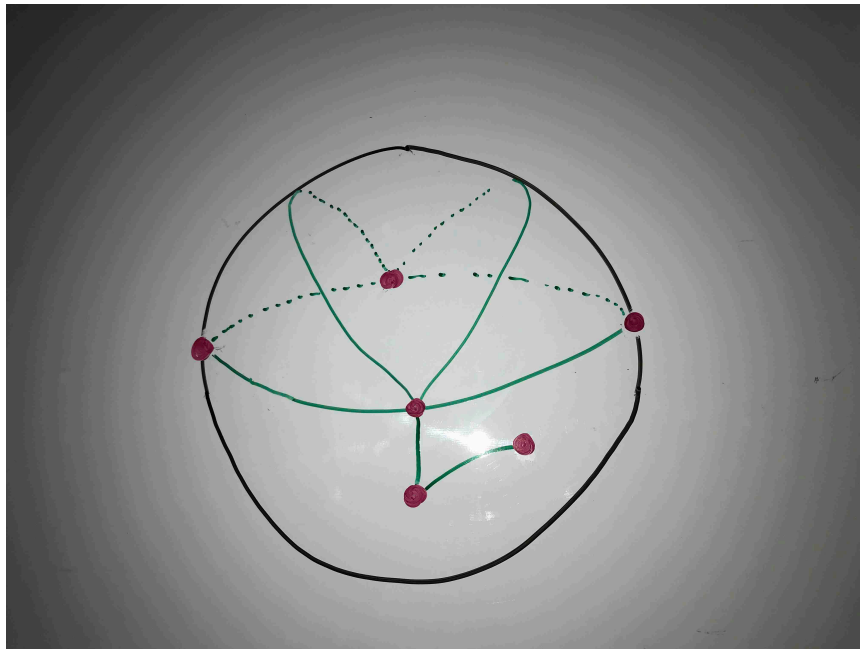


## 2 Colonisation d'une planète

Les Terriens viennent de coloniser une nouvelle planète entièrement recouverte d'eau. Ils y construisent des *colonies* flottantes qu'ils relient entre-elles par d'immenses *ponts* flottants, avec les deux impératifs suivants :

- pour des raisons de coût, on n'autorise pas les intersections de ponts ;
- pour éviter l'isolement sur cette nouvelle planète, on exige qu'on puisse passer de toute colonie à l'autre en empruntant les ponts.

Ce réseau de colonies et de ponts partage la surface de la planète en *mers* inhabitées. On note  $C \geq 1$  le nombre de colonies,  $P \geq 0$  le nombre de ponts et  $M \geq 1$  le nombre de mers. Voici, par exemple, un réseau possible sur cette nouvelle planète avec  $C = 6$ ,  $P = 8$ ,  $M = 4$  :



- (1) En dessinant de nombreux autres exemples, trouver une identité qui relie ces trois valeurs  $C, P, M$ .
- (2) Essayer de démontrer cette identité.
- (3) Si on exige que chaque colonie soit reliée directement à chacune des autres par un unique pont, quelles valeurs de  $C, P, M$  sont possibles ?
- (4) Comme pour la Terre, on partage cette nouvelle planète en deux hémisphères. On place  $n$  colonies dans l'hémisphère « Nord » et  $n$  autres colonies dans l'hémisphère « Sud » (si bien que  $C = 2n$ ). Si on exige que chaque colonie du Nord soit reliée directement par un unique pont à chacune des colonies du Sud, quelles sont les valeurs possibles pour  $C, P, M$  ?