

Les pommes qui tombent

MATH.en.JEANS

Octobre 2015

Observons une pomme qui tombe et réalisons l'expérience suivante : on mesure toutes les secondes, la position de la pomme. On obtient alors le tableau suivant :

temps (en s)	0	1	2	3	4	5	6	7
positions (en cm)	0	409	1636	3681	6544	10225	14724	20041

On appelle $(0, 409, 1636, 3681, 6544, \dots)$ la suite des positions de la pomme.

Réalisons l'opération suivante, que l'on appellera Δ qui transforme la ligne des positions. Commençons par soustraire au nombre de la colonne 1, celui de la colonne 0. Faisons la même chose parallèlement avec les colonnes 2 et 1, 3 et 2, 4 et 3, 5 et 4, 6 et 5. On obtient le nouveau tableau suivant (la nouvelle ligne calculée est appelée Δ).

temps(s)	0	1	2	3	4	5	6	7
position (cm)	0	409	1636	3681	6544	10225	14724	20041
Δ		409	1227	2045	2863	3681	4499	5317

Réitérons le processus 2 fois de suite en utilisant la dernière ligne calculée. On obtient le tableau suivant :

temps(s)	0	1	2	3	4	5	6	7
position (cm)	0	409	1636	3681	6544	10225	14724	20041
Δ		409	1227	2045	2863	3681	4499	5317
Δ^2			818	818	818	818	818	818
Δ^3				0	0	0	0	0

1. Qu'observez-vous ?
2. On souhaite trouver la position de la pomme au bout de 200 secondes. Peut-on utiliser l'opération Δ et l'observation que vous avez faite ?
3. Est-il possible de trouver une formule pour la position de la pomme quand elle se trouvera à la seconde n ?
4. Si on prends une suite initiale de positions quelconques, ce processus ne finit pas toujours par donner la suite $(0, 0, 0, \dots)$. Quelles sont les suites qui finissent toujours par se transformer en la séquence $(0, 0, 0, \dots)$?
5. Supposons qu'au bout de p itérations du processus présenté ci-dessus, on obtienne la suite : $(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ où le motif 1, 2, 3 se répète indéfiniment. Est-il possible de trouver une formule qui donne le terme numéro n de la suite initiale ?
6. Peut-on donner une formule pour n'importe quel motif ?
7. Supposons maintenant que les mesures de certaines positions soient perdues. Existe-t-il un moyen pour retrouver les valeurs perdues ? Si on fait une mesure toutes les 2 secondes (les temps pairs), peut-on trouver une formule qui donne la position aux temps impairs ?