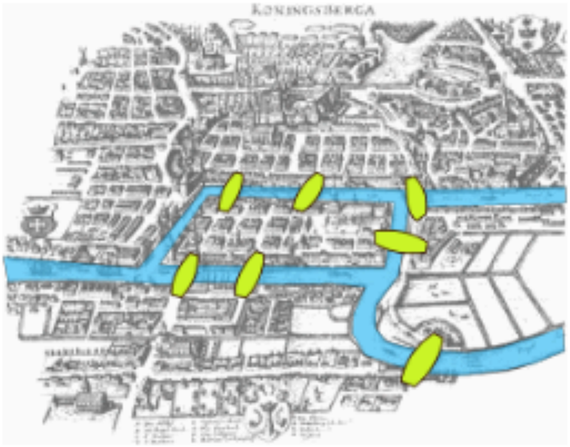

Sujet 4 : À propos des graphes

La ville de Königsberg possède 7 ponts disposés comme sur l'image ci-dessus. On se pose la question de savoir si l'on peut faire une promenade passant dans toutes les parties de la ville et empruntant chaque pont exactement 1 fois. On appellera un tel parcours une *promenade optimale*.

(1) Faire quelques essais pour trouver une promenade optimale.

(2) Modéliser le problème en dessinant un graphe (c'est-à-dire placer des sommets dans le plan, éventuellement reliés par des arêtes) où chaque partie de la ville est représentée par un sommet et où l'on relie les sommets avec autant d'arêtes qu'il y a de ponts reliant les parties de la ville correspondantes.

(3) On modélise une promenade optimale sur le graphe par un parcours du graphe passant exactement une fois par chaque sommet. En remarquant que le passage par un sommet qui n'est ni le premier ni le dernier du parcours, utilise exactement 2 arêtes (une « entrante » et une « sortante »), essayer de montrer qu'il n'existe pas de promenade optimale dans Königsberg.

Les graphes permettent de modéliser beaucoup de problèmes en mathématiques. Outre le problème des ponts de Königsberg, on propse ici une seconde illustration.

Dans une assemblée de gens réunis, on suppose que deux personnes quelconques ont toujours au moins un ami en commun dans l'assemblée. La question est de montrer qu'alors une des personnes de l'assemblée est amie avec toutes les autres personnes.

On modélise le problème grâce à un graphe où chaque personne est représentée par un sommet et où l'on met une arête entre deux sommets si les personnes correspondantes sont amies.

(4) Représenter un graphe qui convient dans le cas d'assemblées de 3, 4, 5, 6 personnes.

(5) Comment faire pour construire un graphe qui convient dans le cas d'une assemblée de n personnes (où $n \geq 3$ est un nombre entier quelconque) ? Combien y a-t-il de graphes différents qui conviennent pour un nombre donné n de personnes ?