

## Déplacements et arithmétique.

Le but du sujet est de comprendre quels sont les déplacements possibles en utilisant qu'un nombre limité de mouvements de base. Pour être plus clair, voici deux exemples.

**Exemple 1 :** Je dois me rendre au 43-ème étage d'une grande tour de 111 étages mais l'ascenseur est étrange : à la place des boutons, il possède deux manivelles, l'une faisant monter ou descendre de 3 étages et l'autre faisant monter ou descendre de 8 étages. En partant du rez-de-chaussée (étage 0), pourrai-je aller au 43-ème étage ? La décoration dans la tour semble très jolie, puis-je visiter tous les étages ? Et que ce passerait-il si à la place de faire  $\pm 3$  et  $\pm 8$ , les manivelles faisaient  $\pm 3$  et  $\pm 6$  ? Et pour d'autres combinaisons ?

**Exemple 2 :** En échec, un cavalier se déplace selon les règles suivantes.

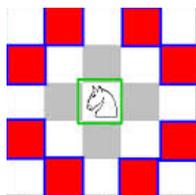


Figure 1: Déplacements d'un cavalier normal.

Déjà, un cavalier peut-il aller partout sur l'échiquier ? Et si l'échiquier était beaucoup plus grand, pourrait-il encore aller partout (en prenant son temps) ? Si vous pensez que oui, comment s'en convaincre vraiment ? Même question si vous pensez que non !

Imaginons maintenant que mon cavalier (ou plutôt son cheval) soit un peu boiteux et qu'il ne puisse faire que la moitié des mouvements, comme indiqué ici :

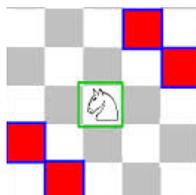


Figure 2: Déplacements d'un cavalier boiteux.

Le cavalier pourra-t-il encore aller partout sur un grand échiquier ?

Dans une troisième situation, le cavalier souhaite être original : il choisit deux mouvements au hasard (pas forcément des mouvements de cavalier), et par prudence il choisit aussi les mouvements opposés (ceux qui permettent de revenir en arrière).

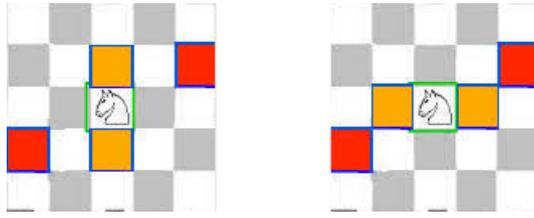


Figure 3: Deux exemples de cavaliers originaux. En rouge le 1er mouvement choisit ainsi que son opposé. En orange, le deuxième avec son opposé.

La encore, ce cavalier pourra-t-il aller partout ? Et si non, si on regarde toutes les cases qu'il peut atteindre, voit-on une régularité apparaître ? Et, supposons que le cavalier a déjà choisi son 1er mouvement, peut-on toujours lui en conseiller un deuxième pour qu'il puisse aller partout ?