# Diviser pour mieux compter

Le but de ce sujet est de calculer les valeurs de certaines fractions longues. Cependant, contrairement à des fractions classiques, celles que nous allons étudier sont des fractions qui peuvent éventuellement être infinies ! C'est pourquoi on les appelle fractions longues ! En effet, il est possible d'écrire chaque nombre réel sous la forme d'une fraction éventuellement infinie d'entiers. On s'intéressera donc à des fractions longues qui sont de la forme suivante :

$$F = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

où les nombres $a_0, a_1, \ldots$ sont des entiers et sont en nombre fini ou infini. On écrit aussi cela de façon plus compacte ainsi : $F = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$. On pourra commencer par admettre que pour n'importe quelle suite (finie ou infinie) de nombres, $F$ représente un nombre réel. On commencera alors par essayer de calculer $F$ dans les différents cas suivants :

1. $[1, 1, 1, 1, \ldots]$
2. $[2, 2, 2, 2, \ldots]$
3. $[a, a, a, a, \ldots]$
4. $[1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$

Et a contrario, on pourra aussi essayer de calculer la fraction longue représentant les nombres : $3/2$, $15/8$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, ... Nous chercherons ensuite des résultats plus théoriques comme chercher à savoir quels sont les fractions longues des nombres sous la forme $\sqrt{n^2+1}$ par exemple.