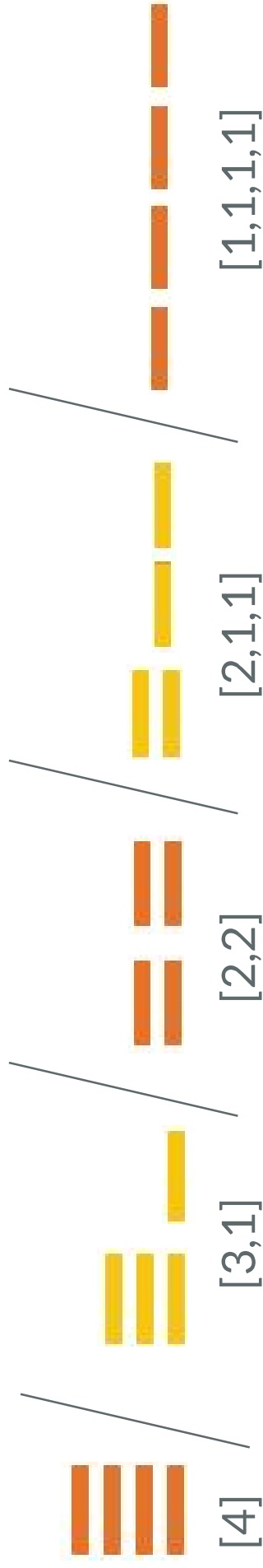


Sujet 2 : le jeu des jetons

Soit $n > 2$ un entier. On considère un jeu à deux joueurs qui se joue avec n jetons identiques. Une configuration est la répartition de ces n jetons en un certain nombre de piles. Par exemple, pour $n = 4$, les configurations possibles sont les suivantes :



En partant d'une configuration de départ, les joueurs jouent à tour de rôle et peuvent :

- soit diviser une pile en m piles de même taille ($m \geq 2$ entier) ;
- soit fusionner deux piles de tailles différentes.

Le joueur n'ayant plus de coup possible a perdu.

Première question

Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, pour quels $n > 2$ existe-il des parties qui durent indéfiniment ?

Définition : On dit qu'une configuration est de longueur l et on note $l(c) = l$, lorsqu'en partant de celle-ci, un des deux joueurs est sûr de pouvoir gagner en l coups (on compte les coups des deux joueurs) et si pour tout $k < l$, son adversaire peut l'empêcher de gagner en k coups.

Que valent $l([3, 1])$ et $l([2, 2])$?

Réponse

- En partant de la configuration $[3, 1]$, le joueur qui commence (on l'appellera J1) est sûr de pouvoir gagner en 1 coup. En effet, s'il joue $[3, 1] \rightarrow [1, 1, 1, 1]$, l'autre joueur (qu'on appellera J2) n'a plus de coup possible, et J1 a donc gagné.
Conclusion, $l([3, 1]) = 1$.

- En partant de $[2, 2]$, J2 est sûr de pouvoir gagner en 2 coups. En effet, J1 n'a qu'un seul coup possible : $[2, 2] \rightarrow [2, 1, 1]$. J2 peut ensuite jouer $[2, 1, 1] \rightarrow [1, 1, 1, 1]$ et J1 a alors perdu.

Conclusion, $l([2, 2]) = 2$.

Questions

- 1) Trouver toutes les configurations de longueur 1.
- 2) Caractériser les $n > 2$ pour lesquels il existe une configuration à n jetons de longueur supérieure ou égale à 2, puis de longueur supérieure ou égale à 4.
- 3) Soit $n > 2$. Étudier la longueur du jeu à n jetons (on pourra commencer par étudier les petites valeurs de n).
- 4) Pour quels $n > 2$ les configurations du jeu à n jetons sont-elles toutes de longueur finie ?