4 Des triangles tricolores

Échauffement : segment bicolore en 1D. On considère un segment ayant un sommet bleu et et sommet vert. On place des points sur ce segment pour le couper en petits segments, puis on colorie chacun des points en bleu ou en vert.

▹ Justifiez qu'il y a au moins un petit segment dont les extrémités sont de couleurs différentes (on dira un segment bicolore). Que peut-on dire sur le nombre de segments bicolores ?

Les choses sérieuses : triangle tricolore en 2D. Soit $\mathcal{T}$ un triangle dont les sommets sont bleu, vert et rouge. On découpe $\mathcal{T}$ en petits triangles de sorte qu'aucun sommet d'un petit triangle ne soit sur le côté d'un autre.

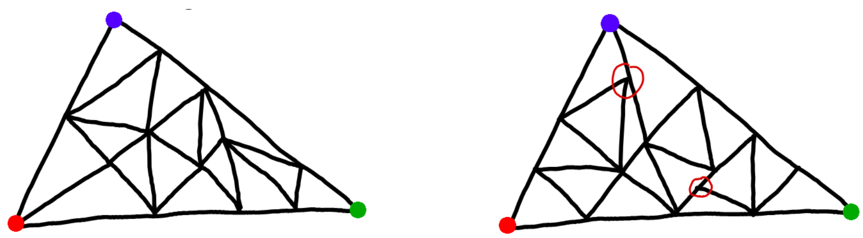

FIGURE 6 – Bon (à gauche) et mauvais (à droite) découpage.

On attribue une couleur à chacun des sommets des triangles selon les règles suivantes :

- si le sommet est sur le côté de $\mathcal{T}$, la couleur choisie doit être l'une des couleurs des sommets du côté,
- si le sommet est au centre de $\mathcal{T}$, on choisit la couleur qu'on veut.

Voici un exemple de tels choix.

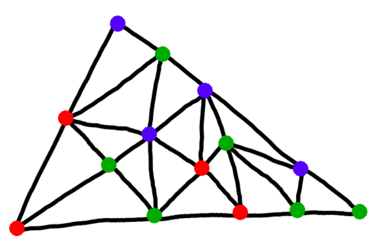

FIGURE 7 – Exemple de coloriage.

▹ Construisez des exemples. Sur chacun des exemples, pouvez-vous trouver un triangle tricolore, c'est-à-dire un triangle dont les 3 sommets ont des couleurs différentes ?

▹ Y-a-t-il toujours un triangle tricolore, ou pouvez-vous construire un contre-exemple ?