Sujets Maths en Jeans

Vincent Guirardel

September 30, 2013.

1 L'élévateur fantasque

Un élévateur est actionné par un levier, dont les positions sont graduées de 0 à 1. Lorsque le levier est sur la position 0, l'élévateur est tout en bas sur le sol. Lorsque le levier est sur la position 1, tout en haut, l'élévateur est à sa hauteur maximale, à $1m$ du sol. Plus on monte le levier, plus l'élévateur monte. Mais le système de commande est assez subtil. La notice du constructeur dit:

- Si la position du levier est comprise entre 1/3 et 2/3, alors l'élévateur est exactement à $0.5m$ du sol.
- La commande est symétrique: si on change la position du levier de commande de x à $1-x$, l'élévateur passe de la hauteur h à $1-h$.
- Si le levier de commande est positionné en $x \leq 1/3$, et si on le déplace à la position $3x$, alors la hauteur de l'élévateur est doublée.

Quelques exemples: si la position x du levier vaut 1/9, alors l'élévateur sera à la hauteur $0.25m$. En effet, lorsqu'on passe le levier de 1/9 a 1/3, sa hauteur doit doubler (règle 3) et doit arriver à $0.5m$ (règle 1). Par symétrie, si la position du levier est sur 8/9, alors l'élévateur est a $3/4m$.

Pour se chauffer: à quelle hauteur se trouvera l'élévateur si on met le levier sur

- 1/100
- $1/\sqrt{2} = 0,707..$

Un peu moins évident: Si on met le levier sur 1/4 ? sur 1/10 ?

Problème A quelle hauteur mettre le levier pour que l'élévateur soit $1/7m$? $1/17m$?

Problèmes complémentaires Ecrire un algorithme qui calcule la hauteur de l'élévateur en fonction de la position du levier.

Est-ce que si on met le levier sur une position correspondant à une fraction, la hauteur sera aussi une fraction ?

Est-ce que toute hauteur correspondant a une fraction peut être atteinte en mettant le levier sur une fraction ?

Ecrire un algorithme qui permet de savoir quelle position du levier mettre pour atteindre une hauteur donnée.

Quels sont les hauteurs d'élévateurs pour lesquelles il n'y a qu'une position du levier qui permette de les atteindre ?

Est-ce que les données du constructeur permettent de savoir à quelle hauteur sera l'élévateur pour n'importe quelle position du levier ?

2 Mélange de cartes

Lorsqu'on mélange des cartes à jouer, on effectue souvent plusieurs types de mélanges élémentaires. En voici 3: la coupe, le mélange américain, et la coupe triple.

1. *la coupe*: on sépare le paquet en deux parties (de tailles quelconques), on les échange et on reforme le paquet.

2. *le mélange américain* (un peu idéalisé): on coupe le paquet en deux moitiés égales, et on intercale une carte sur 2. Pour que les choses soit reproductibles, on peut decider de toujours faire la meme chose: prendre une carte du paquet du haut, puis une du paquet du bas, puis la deuxieme du paquet du haut, puis la deuxieme du paquet du bas, etc. Pour généraliser, si le nombre de cartes est impair, on decide de prendre la grosse moitié dans le paquet du haut.

3. *la coupe triple*: on coupe le paquet en trois paquets de tailles arbitraires, et on les réarrange dans un autre ordre (sans intercaler les cartes des différents paquets).

On peut bien sûr penser à d'autres façons de mélanger.

La question est de savoir si ces systèmes de mélanges sont de bons mélanges.

Par exemple, si on connait l'ordre initial des cartes (par exemple si elles sont rangées dans l'ordre), et si on mélange en n'utilisant que des coupes, il est facile de prévoir avec une seule carte les cartes qui vont suivre.

Autre chose: si on n'utilise que des mélanges américains, la carte du dessus reste dessus.

On peut donc décider d'utiliser des systèmes mixtes: dans le système coupe-mélange américain par exemple, on peut faire un certain nombre de coupes, puis un certain nombre de mélanges américains, puis à nouveau, un certain nombre de coupes, puis encore un cetrain nombre de mélanges américains, et recommencer ainsi un certain nombre de fois.

On a de manière similaire des systèmes mixtes "coupes/coupes-triples", "mélange américain/coupe-triple", ou le système "coupe/coupe-triple/mélange américain".

Problème On veut savoir quels sont, parmi ces systèmes de mélanges, ceux qui sont forts, c'est à dire tels qu'on ne peux tirer aucune information à partir d'un sous-ensemble de cartes. Autrement dit, le système de mélange est fort si à partir d'une configuration des cartes initiale connue, on puisse obtenir toutes les configurations de cartes possibles en mélangeant les cartes par ce système.

Par exemple, on a vu que si on utilise seulement la coupe ou seulement le mélange américain, on n'a pas un système fort.

Question 2.1. *Le système mixte "coupe/mélange américain" est il fort ? Est-ce que cela dépend du nombre de cartes ?*

Question 2.2. *Même question si on utilise les le systeme coupe/coupe-triple, ou le systeme coupe-triple/mélange américain, ou pour d'autres systèmes de mélanges qui vous semblent plus intéressants ou plus faciles...*

Si le mélange n'est pas fort, que pouvez-vous prédire ? Par exemple si l'as de coeur est sur le dessus du tas, et qu'on utilise le mélange américain, on peut prédire que l'as de coeur restera au dessus du tas. Si le 7 et 8 de trefle se suivent et qu'on n'utilise que des coupes, on peut prédire que le 7 et le 8 se suivront, sauf si le 7 est au fond du paquet.

Pour se chauffer, on peut commencer avec peu de cartes: 3,4,5,6,7,8 cartes...

3 Robot saute-mouton

Un robot à bras téléscopique se trouve sur une table sur laquelle se trouve un... "mouton" de forme géométrique (disons un polygone). Le robot se déplace de la facon suivante. Au début, le mouton se trouve dans son dos. Il tourne sur lui-même dans le sens trigonométrique (sans se déplacer) jusqu'à ce que son "oeil/viseur" ait en ligne de mire un point du mouton, disons M. Ce point M est le *premier* point que l'oeil du robot rencontre en tournant. Le robot attrape alors le point M avec son bras téléscopique, et saute par dessus le point M. Ainsi, si le robot se trouve en un point R avant son saut, il se retrouvera au point R' sur la droite (RM) à même distance de M que R (c'est à dire que M est le milieu de $[RR']$).

Une fois ce déplacement effectué, le robot a maintenant le point M dans son dos, et il recommence: il tourne sur lui-même dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'il ait un point du mouton en ligne de mire, et il saute par dessus.

Le problème Le probleme general est de savoir si, pour certaines positions de départ, le robot reviendra exactement a son point de départ au bout d'un certain nombre de sauts. Ou de savoir si, dans certaines situations, le trajet du robot pourra s'éloigner arbitrairement loin du mouton ou si au contraire, il restera à distance bornée du mouton.

Etudier le cas des moutons triangulaires: si le mouton est un triangle équilatéral, ou un triangle rectangle isocèle, voire un triangle quelconque, existe-t-il des positions de départ pour lesquelles le robot reviendra a sa position initiale ? Existe-t-il des positions de départ pour lesquelles le robot partira arbitrairement loin ?

Même question pour un carré.

Même question pour un rectangle, ou un losange.

Même question pour un pentagone ou un hexagone régulier.

Même question pour un cercle.

Vous pouvez aussi créer des formes de mouton particulières: savez-vous en construire pour lesquelles le comportement du robot sera différent ?

Si on se donne un trajet, peut-on toujours trouver une forme de mouton telle que le robot suivra le trajet donné ?

4 Faire rouler une sphère

On pose une sphère sur une table. Pensons-y comme a un globe terrestre, le pôle sud étant en contact avec la table, le pôle nord étant donc au sommet.

On peut ensuite faire rouler la sphère sans glisser, par exemple le long du méridien de Greenwhich, jusqu'à ce que l'équateur touche la table. On peut ensuite faire rouler la sphère le long de l'équateur jusqu'au méridien 90, puis la refaire rouler le long du méridien 90 jusqu'à ce que le pôle sud soit à nouveau en contact avec la table. Sur la sphère, le point de contact a décrit une sorte de triangle: un morceau du méridien de Greenwich, un morceau d'équateur, et un morceau du méridien 90. Si on regarde le trajet effectué par la sphère sur la table, on voit que la sphère a parcouru 3 cotés d'un carré. Si au début du trajet, le méridien zero de la sphère est parallèle au grand côté de la table, ca ne sera plus le cas après le trajet. Il y a un angle de 90^o entre l'orientation initiale du méridien de Greenwich, et son orientation finale.

Plus généralement, si on dessine sur la sphère un chemin c issue du pôle sud, on peut faire rouler la sphère sur la table pour que son point de contact avec la table décrive ce chemin c. Pendant ce temps, le point de contact décrit sur la table un chemin c'. On peut prendre les choses dans l'autre sens, et faire glisser la sphère le long de c', et obtenir un chemin c tracé sur la sphère.

Les méridiens et l'équateur sont des exemples de grands cercles: ils sont obtenus comme intersection d'un plan passant par le centre de la sphère avec la sphère. Les parallèles, eux, n'en sont pas (sauf l'équateur).

Si on fait rouler la sphère en suivant un grand cercle elle va en ligne droite sur la table. Mais ce n'est pas le cas si on la fait rouler sur un parallèle par exemple: le chemin c' décrit sur la table sera alors un cercle (Pourquoi ??? de quel rayon ???). On suppose donc que c est un chemin formé de segments contenus dans des grands cercles. Le chemin c' correspondant est donc un polygone.

Question 4.1. *Si c est un chemin partant et retournant au pôle Sud, comment calculer l'angle entre l'orientation initiale du méridien de Greenwich, et son orientation finale ?*

Quels sont les chemins c (ou les chemins c') tels que cet angle soit nul ?

Variante: on se donne un angle α, et deux points A et B sur la table. On pose la sphere sur la table, le pôle Sud en A. Comment trouver un chemin c sur la sphere (ou c' sur la table) tel qu'en faisant rouler la sphere le long de c (ou c'), la sphère arrive avec le pôle Sud en B, et son méridien de Greenwhich ayant fait un angle α entre sa position initiale et sa position finale.

Quel est le chemin le plus court possible qui permette de faire cela ?

Si on se donne un chemin polygonal c' tracé sur la table, et qu'on fait rouler la sphère le long de c' en partant avec le pôle sud au contact de la table, il se peut qu'à la fin du trajet, le pôle Sud soit revenu au contact de la table, ou pas.

Question 4.2. *Quels sont les chemins c' tels que le pôle Sud revienne au contact de la table ?*