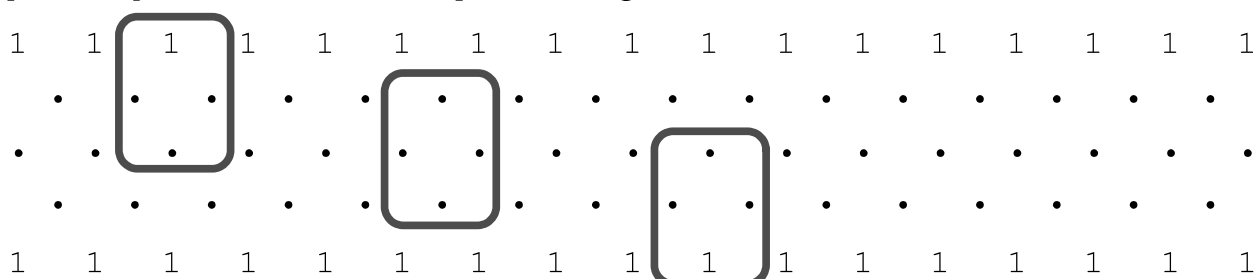


# La nouba des nombres

## Sujet MATH.en.JEANS n°1

On se donne deux lignes de 1, séparées par d'autres lignes vides, telles que les nombres sont disposés en quinconce. Voici un exemple, avec 3 lignes intermédiaires :



Dans cet exemple, chaque ligne se poursuit à l'infini de part et d'autre, et chaque point doit être remplacé par un nombre : c'est le but du problème. Pour déterminer ces nombres, on remarque qu'on peut faire des groupes de 4 nombres en forme de diamant (3 groupes sont entourés ci-dessus à titre d'exemple). Si on identifie chaque nombre par son point cardinal, alors la règle qu'on se donne est :



1) La première question que je pose est : peut-on remplir les lignes vides avec uniquement des nombres entiers strictement positifs (quel que soit le nombre de lignes vides) ?

2) On peut ensuite étudier le problème en commençant avec une seule ligne vide. Combien de possibilités avez-vous ? Quelles sont-elles ?

3) Si on passe à deux lignes, on se donne a,b,c,d,e placés comme :

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & a & b & c & \bullet \\
 & & d & e & F & \bullet \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

Montrer alors que a=F  
 Comment se complète le schéma ?  
 Quelle sont alors les possibilités ?

*Indice : on pourra commencer par montrer l'égalité suivante, vraie quels que soient a,b,c,d,e :*  
 $(1+c)(1+b-de)-(1+b)(1+c-ae) = e \{ (1+a-cd) - (1+d-ab) \}$

4) Si on passe à trois lignes, quelles sont les possibilités ?

5) Pour un nombre quelconque de lignes,

- tous les nombres sont-ils déterminés si on remplit une diagonale de 1 ?
- Et si on fixe les nombres d'une diagonale (par forcément avec des 1) ?
- Peut-on y mettre n'importe quel nombre ou y-a-t'il un nombre maximum ?
- Et si on met des 1 non plus selon une diagonale mais une ligne brisée qui relie la première à la dernière ligne ?
- Y a-t-il toujours une telle ligne de 1 ?
- saurez-vous dire combien de possibilités en fonction du nombre de lignes ?
- Que remarquez-vous sur les schémas que vous obtenez ?