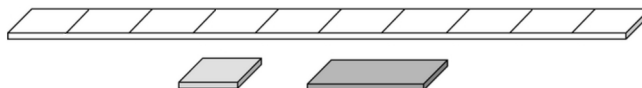


HS6

C'est la tuile ! (1ères-Terms)

PRÉSENTATION

On considère une planche formée de n carrés et des *tuiles* (ou dominos) formées de 1 ou 2 carrés :



On veut recouvrir la planche à l'aide de ces tuiles. Quel est le nombre de façons de faire, en utilisant un ou deux types de tuiles, pour une planche de longueur n ? On note f_n ce nombre.

QUESTIONS

1. Montrer que

$$f_0 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1}.$$

2. Montrer aussi que, si m, n sont deux entiers naturels,

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}.$$

3. On rappelle que le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ permet de compter le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble qui en contient n . Montrer que

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots = f_n.$$

4. Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}.$$

5. Calculer

$$f_n^2 + f_{n-1}^2 \quad \text{et} \quad f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3.$$

6. Maintenant, on rajoute un troisième type de tuile, qui peut couvrir trois carrés. Combien de recouvrements sont alors possibles ?